Service de
Théorie des Circuits
et de Traitement du Signal

Examen DE TRAITEMENT DU SIGNAL

1ère partie (2h sans notes)
4ème ELEC - Janvier 2004

1. [35/100] Jeu des 8 familles (D'après J. Lebrun, EPFL)

Pour chaque diagramme de pôles-zéros (Z1-Z8 ; Fig. 1), retrouver la réponse en fréquence (F1-F8 ; Fig. 2) et la réponse impulsionnelle (I1-I8 ; Fig. 3) correspondantes. JUSTIFIEZ TOUS VOS CHOIX.

Complément théorique : La Fig. 1 présente certains systèmes comportant des pôles en dehors du cercle de rayon unité. En général, de tels systèmes sont instables, et leur réponse en fréquence n'est donc pas définie, … sauf si l'on calcule uniquement la réponse impulsionnelle *h(n)* correspondante pour n<=0 et qu'on suppose cette réponse nulle pour n>0 (on obtient alors des systèmes dits *anti-causaux*).

En effet, si un signal *x(n)* causal (c.à.d. nul pour *n*<0) admet pour transformée en z : $X(z) = x(0)+x(1)\ z^{-1}+ x(2)\ z^{-2}+ x(3)\ z^{-3}+…$, alors le signal *y(n)=x(-n)* (anti-causal) admet pour transformée en z : $Y(z) = x(0)+x(1)\ z^{1}+ x(2)\ z^{2}+ x(3)\ z^{3}+…$

Les zéros du Y(z) sont donc les inverses (complexes) des zéros de X(z), ce qui implique que l'intérieur du cercle de rayon unité correspond alors à l'extérieur de ce même cercle lorsqu'on se restreint aux signaux anti-causaux.

On supposera donc ici que les systèmes de la Fig. 1 dont les pôles sont en dehors du cercle de rayon unité sont anti-causaux, et donc stables.

2. [30/100] Soit le signal x(n) donné par : $x(n)= 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$

   a. Calculer tous les échantillons du signal $y(n)=x(n)*x(n)$

   b. Calculer la transformée de Fourier Discrète (TFD) *X(k)* de *x(n)* sur N_{TFD}=4 points (c'est-à-dire pour *k*=0 à N_{TFD}-1)

   c. Même chose pour *Y(k),* la TFD de *y(n)* sur 4 points*,* et vérifier qu'on a bien *Y(k)=X²(k)*

   NB : On notera au passage que l'opération qui permet que l'égalité soit bien vérifiée revient également à interpréter la convolution comme une convolution *circulaire*. Ceci explique la propriété de la TFD : $x(n)\otimes y(n)\Leftrightarrow X(k)Y(k)$

3. [35/100] Soit *x(n)* un bruit blanc <u>de moyenne égale à 2</u> et de variance unitaire. On passe ce bruit à travers un filtre dont l'équation de récurrence est :

   $y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$

On demande :

   a. De donner une représentation graphique de $\phi_{xx}(k)$

   b. D'exprimer analytiquement $\phi_{yy}(k)$ de *y* en fonction de $\phi_{xx}(k)$

   c. D'en déduire les valeurs de $\phi_{yy}(k)$ et d'en donner un graphique

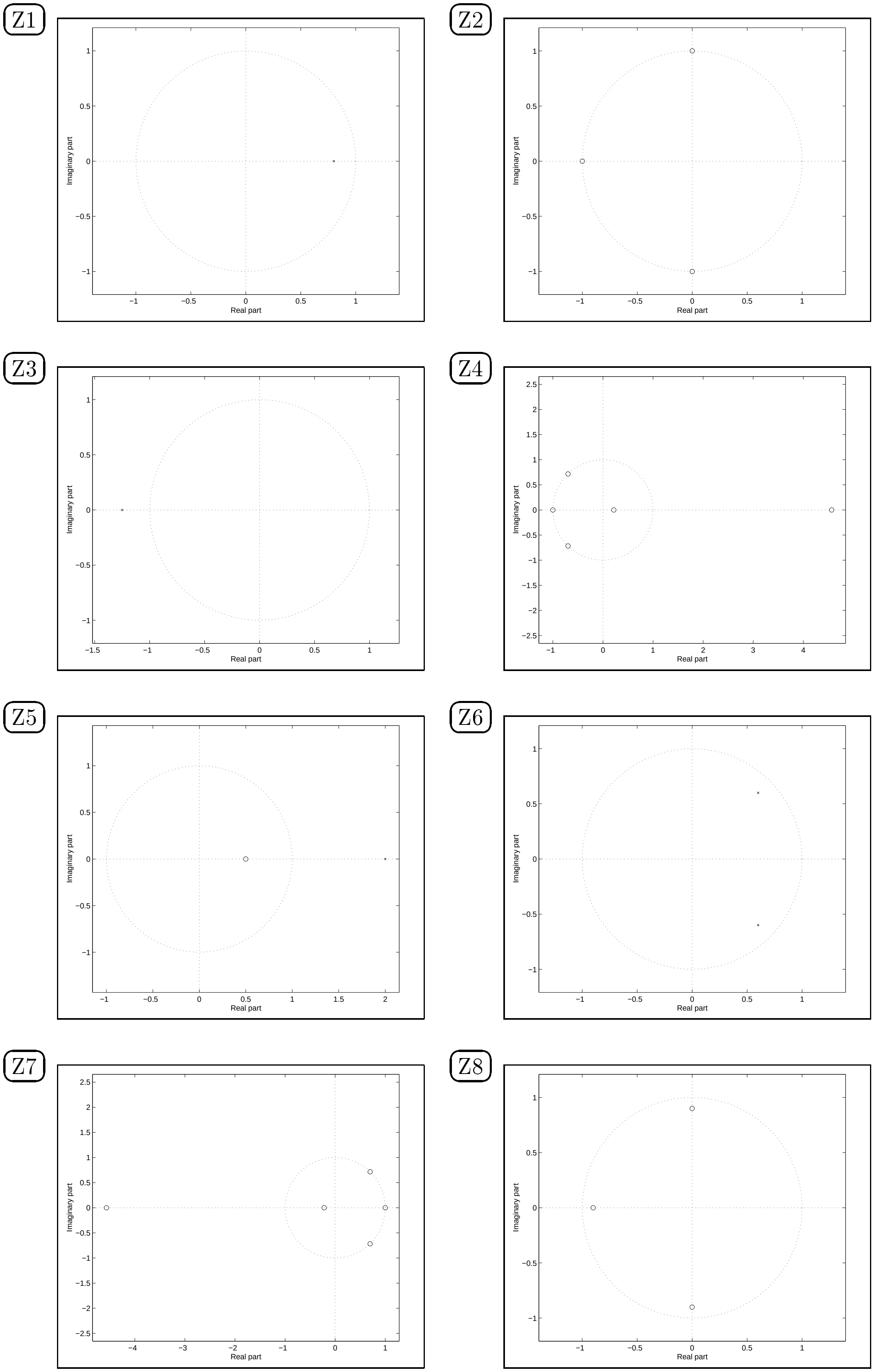

Figure 1: diagramme zéros/pôles dans le plan des z des 8 différents systèmes linéaires invariants dans le temps.

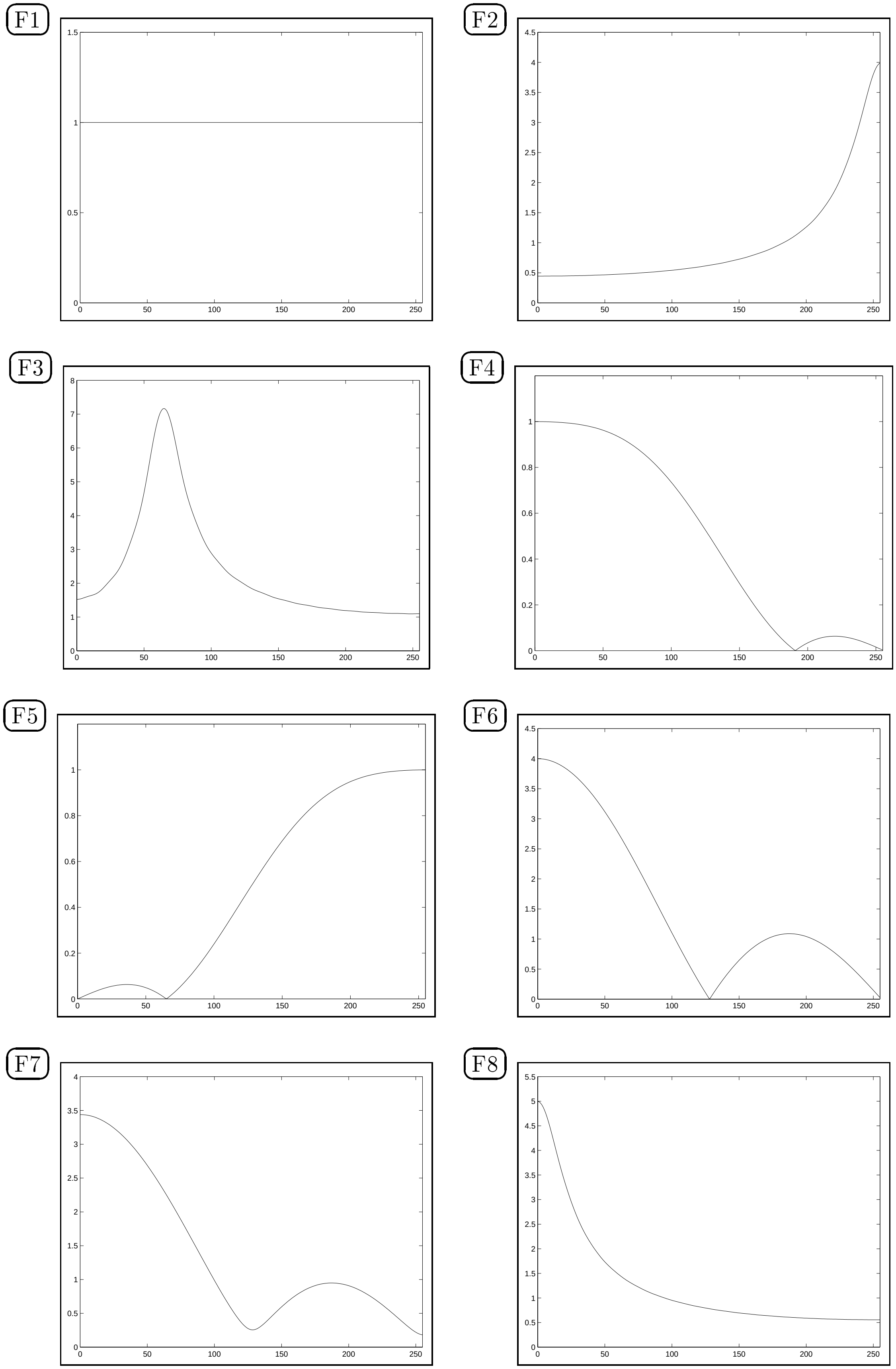

Figure 2: Graphe de l'amplitude des réponses fréquentielles $|H(e^{j\omega})|$ obtenues par DFT sur 512 points. L'abscisse correspond à la pulsation ω (l'indice 255 correspondant à la pulsation $\omega = \pi$).

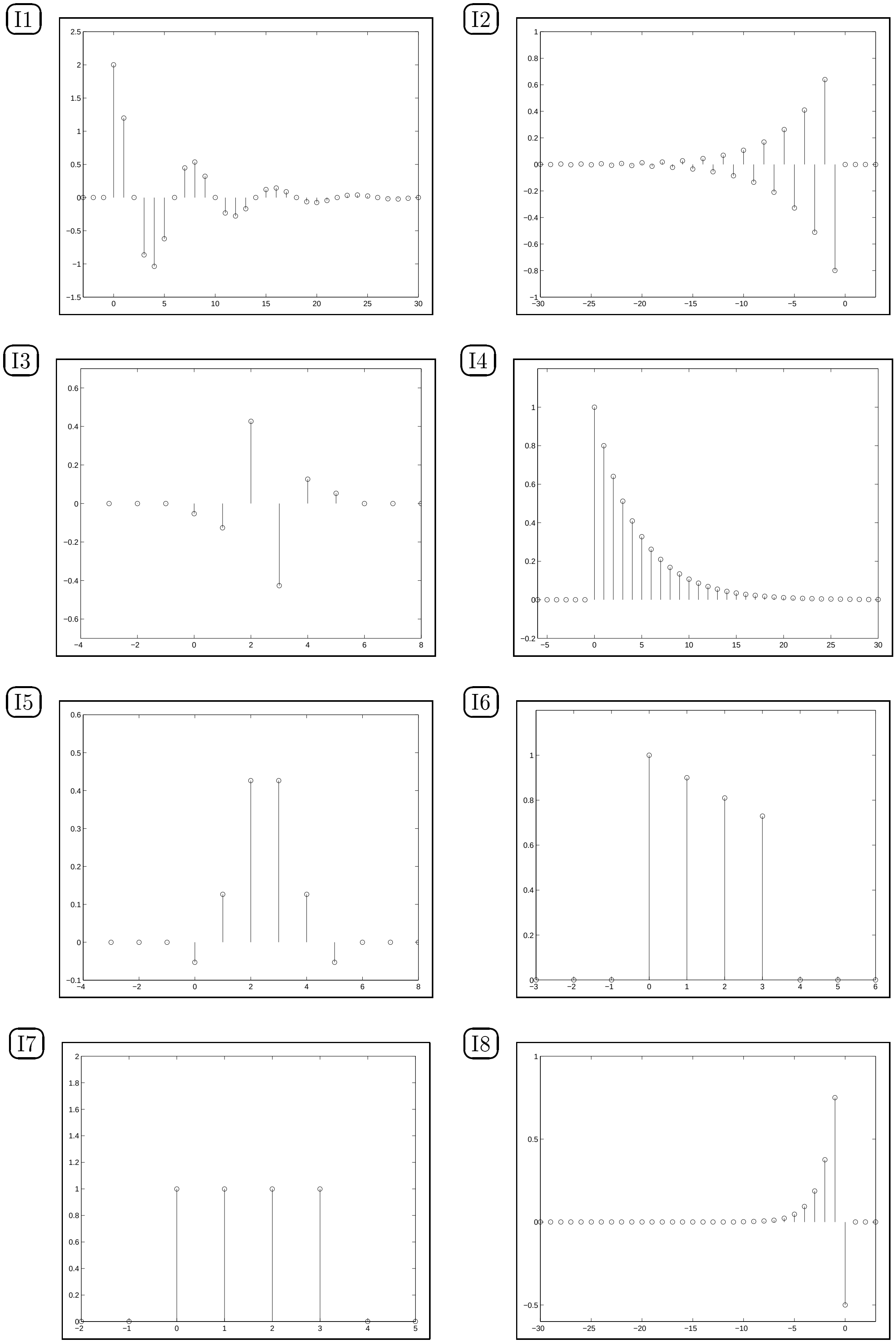

Figure 3: Réponses impulsionnelles $h[n]$. L'abscisse correspond au temps discret n.