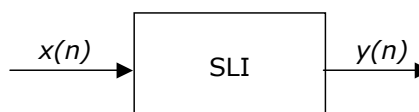


1. a. Donner la fonction de transfert en  $z$  correspondant à la récurrence suivante, étudier sa stabilité, et proposer une structure pour le SLI correspondant. [15/100]

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + y(n-1) + 4y(n-2)$$


**Solution :**

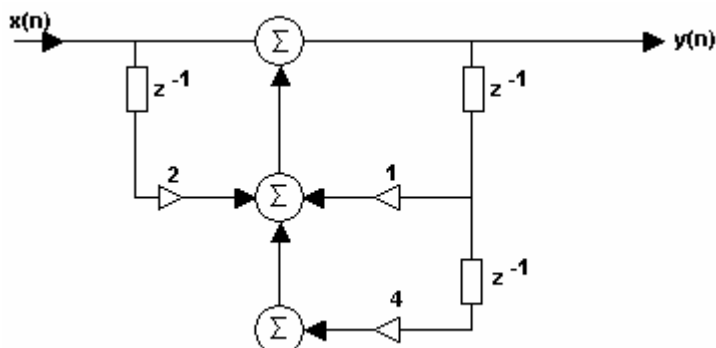
Fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1} - 4z^{-2}}$$

Stabilité :

racines de  $z^2 - z - 4$  :  $z_1, z_2 = \left| \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right| > 1 \Rightarrow$  système instable

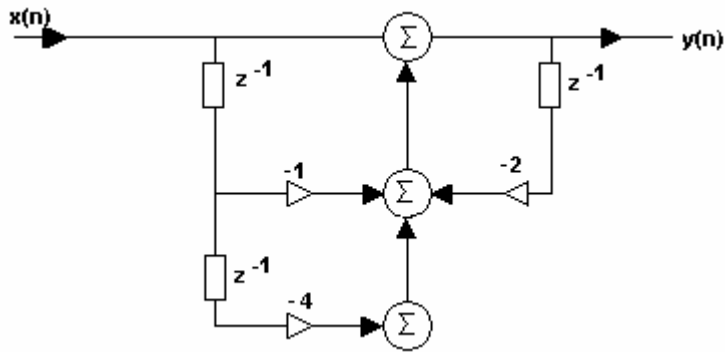
Structure :



- b. Donner l'équation de récurrence du SLI *inverse* (celui qui produirait  $x(n)$  en sortie si on lui présentait  $y(n)$  en entrée) et proposer une structure. [15/100]

**Solution :**

$$H_{inv}(z) = \frac{1 - z^{-1} - 4z^{-2}}{1 + 2z^{-1}} \Rightarrow y(n) = x(n) - x(n-1) - 4x(n-2) - 2y(n-1)$$



2. Soit le filtre défini par la relation :

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n-10), \text{ où } 0 < \alpha.$$

On demande :

- De déterminer l'expression analytique de sa réponse en fréquence
- De tracer son diagramme pôles-zéros (séparer le cas  $\alpha < 1$  et le cas  $\alpha > 1$ )
- D'en déduire une esquisse du graphique du module de sa réponse en fréquence (séparer le cas  $\alpha < 1$  et le cas  $\alpha > 1$ ).

[25/100]

**Solution :**

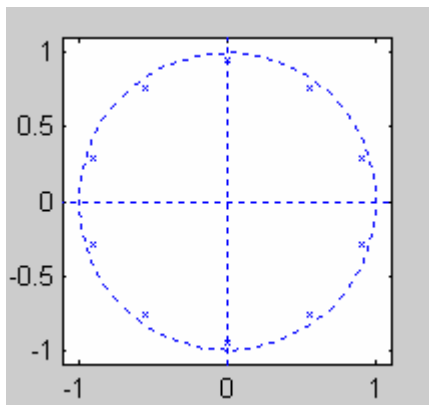
**a.** 
$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-10}}$$

**b.** pas de zéros

pôles :  $z^{-10} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow z^{10} = \alpha$

si  $z = re^{j\theta} \Rightarrow r^{10} e^{j10\theta} = \alpha \Rightarrow r = \sqrt[10]{\alpha}$  et  $\theta = k \frac{2\pi}{10}$

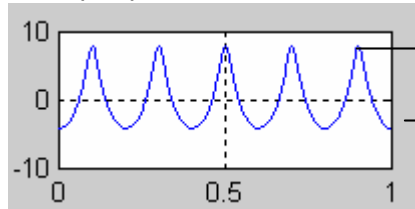
si  $\alpha < 1$ :



si  $\alpha > 1$ :  $\Rightarrow$  système instable .

c. si  $\alpha < 1$ :

exemple pour  $\alpha = 0.6$



$$\text{Max} = \frac{1}{1-\alpha} = 2.5 \Rightarrow 7.96\text{dB}$$

$$\text{min} = \frac{1}{1+\alpha} = 0.652 \Rightarrow -4.0824\text{dB}$$

La réponse en fréquence est maximale lorsque  $\theta = k \frac{2\pi}{10}$  et est minimale lorsque le dénominateur est maximum, soit lorsque  $\exp(j 10 \theta) = -1$

si  $\alpha > 1$ :  $\Rightarrow$  système instable  $\Rightarrow$  pas de réponse en fréquence.

3. A partir de l'interprétation géométrique de la FFT, calculer la FFT  $X(k)$ , sur 8 points, de la séquence définie par :

$$x(0)=x(1)=x(7)=1 \text{ et } x(n)=0 \text{ pour } 2 \leq n \leq 6$$

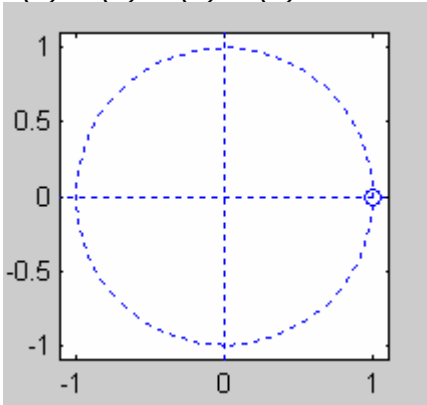
[15/100]

**Solution :**

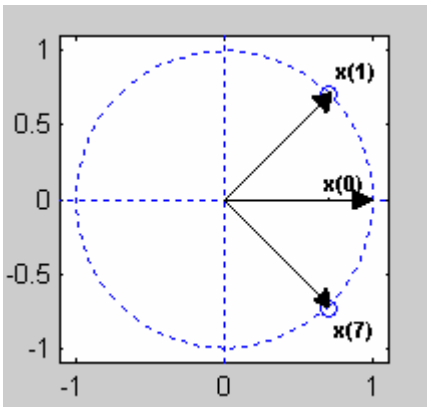
$$X(k) = \sum_0^{N-1} x(n) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}} \text{ où } N=8 \text{ dans notre cas ; } k \text{ est entier et varie de } 0 \text{ à } 7.$$

Nous avons donc :

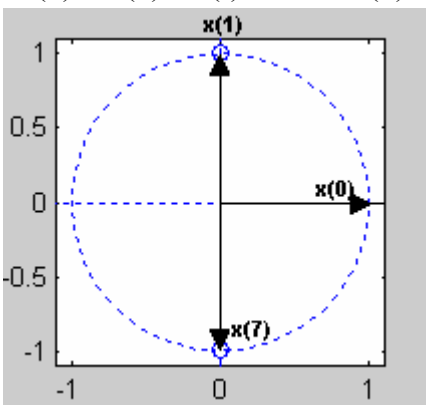
$$X(0) = x(0) + x(1) + x(7) = 1 + 1 + 1 = 3$$



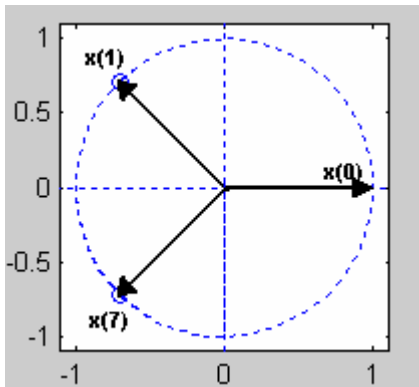
$$X(1) = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{8}} + x(7)e^{-j7\frac{2\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$$



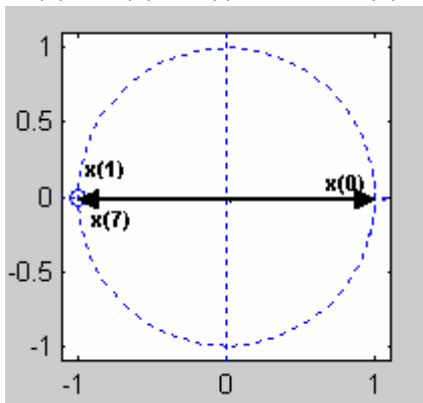
$$X(2) = x(0) + x(1)e^{-j2\frac{2\pi}{8}} + x(7)e^{-j7*2\frac{2\pi}{8}} = 1$$



$$X(3) = x(0) + x(1)e^{-j3\frac{2\pi}{8}} + x(7)e^{-j3*7\frac{2\pi}{8}} = 1 - \sqrt{2}$$



$$X(4) = x(0) + x(1)e^{-j4\frac{2\pi}{8}} + x(7)e^{-j4*7\frac{2\pi}{8}} = -1$$



$$X(5) = X(3)$$

$$X(6) = X(2)$$

$$X(7) = X(1)$$

4. Un signal  $x(t)$  est transmis à travers un canal de communication qui a pour seul effet de le multiplier par une constante  $k$ , de le retarder d'un temps  $t_0$ , et de lui ajouter un bruit  $b(t)$  :  $y(t) = k x(t-t_0) + b(t)$ . Si  $x(t)$  et  $b(t)$  sont non corrélés, quel est le lien entre la densité spectrale de puissance de  $y$  et celles de  $x$  et  $b$  ? [15/100]

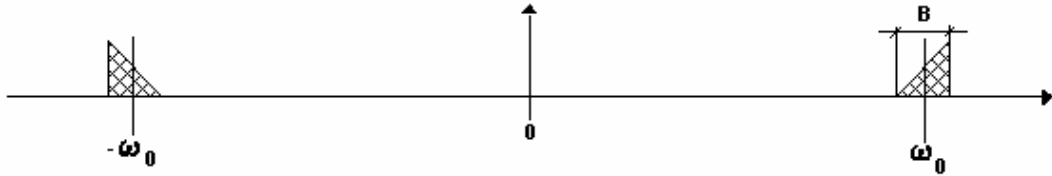
**Solution :**

$$\begin{aligned} y(t) &= k x(t-t_0) + b(t) & \text{et} & & y(t-\tau) &= k x(t-t_0-\tau) + b(t-\tau) \\ \phi_{yy}(\tau) &= E[y(t) y(t-\tau)] = E[(k x(t-t_0) + b(t))(k x(t-t_0-\tau) + b(t-\tau))] \\ &= E[k x(t-t_0) k x(t-t_0-\tau)] + E[b(t) k x(t-t_0-\tau)] + E[k x(t-t_0) b(t-\tau)] \\ &\quad + E[b(t) b(t-\tau)] = k^2 \phi_{xx}(\tau) + 0^1 + 0 + \phi_{BB}(\tau) \\ &\Rightarrow S_{yy}(F) = k^2 S_{xx}(F) + S_{BB}(F) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> puisque le signal et le bruit ne sont pas corrélés

5. Le signal dont la transformée de Fourier (en module) est la suivante doit être échantillonné ( $f_0=1000\text{Hz}$  et  $B=100\text{Hz}$ ) :



Donner la plus petite fréquence d'échantillonnage qui vérifie le théorème de Shannon généralisé (non recouvrement des spectres). [15/100]

**Solution :**

*Théorème de Shannon généralisé => 2 conditions à remplir :*

1.  $f_e \geq 2B \Rightarrow f_e \geq 200 \text{ Hz}$

<p>2. <math>k f_e = f_0 - B/2</math>      ou</p> <p><math>k f_e = (1000 - 50)\text{Hz}</math></p> <p><math>f_e = 950\text{Hz}/k</math></p> <p style="text-align: right;"><i>condition 1.</i></p> <p style="text-align: right;"><math>f_e \geq 200 \text{ Hz}</math></p> <p><math>950/k \geq 200 \Rightarrow k \geq 4</math></p> <p><math>\Rightarrow f_e = 950\text{Hz}/4 = 238\text{Hz}</math></p>	<p><math>k f_e = f_0 + B/2</math>      ; avec <math>k</math> entier</p> <p><math>k f_e = (1000 + 50)\text{Hz}</math></p> <p><math>f_e = 1050\text{Hz}/k</math></p> <p><math>1050/k \geq 200 \Rightarrow k \geq 5</math></p> <p><math>\Rightarrow f_e = 1050\text{Hz}/5 = 210\text{Hz}</math></p>
---	--

*La plus petite fréquence d'échantillonnage qui garantit le théorème de Shannon généralisé est donc  $f_e = 210 \text{ Hz}$ .*

