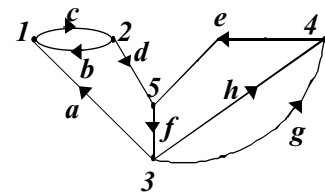
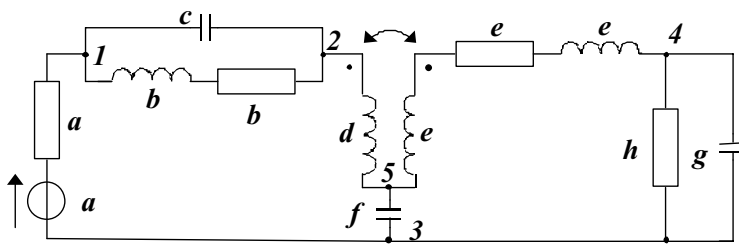


## Analyse des Réseaux Electriques

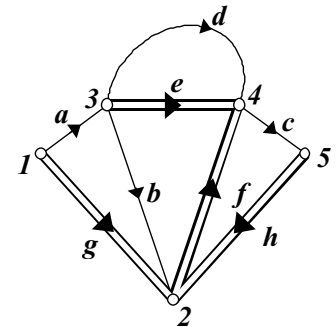
- **Analyse et Mise en Equations des Réseaux Electriques**
- **Analyse par la Méthode des Courants Indépendants**
  - ✓ Exemple : Pont de Mesure de Carey-Foster
- **Analyse par la Méthode des Potentiels Indépendants**
  - ✓ Exemple : Transmission d'un Signal au travers d'un Biporte
- **Réseaux avec Sources Dépendantes**
- **Exercices**

### Théorie des Graphes & Analyse des Réseaux



**Grappe (G)**, associé au réseau :  $\Rightarrow$  **b** branches et **n** nœuds

- **Arbre** = tout sous-graphe connexe qui contient tous les nœuds de **G** mais ne contient aucune maille (**e, f, g, h**)
- **Co-arbre** = sous-graphe complémentaire d'un arbre
- **Chaînon** = branches d'un co-arbre (**a, b, c, d**)



- **Rang** d'un graphe  $\rho$  = nombre de branches dans un arbre :  $\rho = n - 1$
- **Nullité** d'un graphe  $\mu$  = nombre de chaînon :  $\mu = b - \rho = b - n + 1$

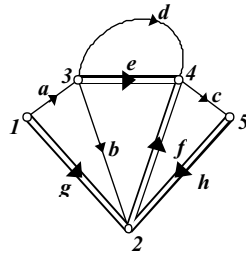
# Théorie des Graphes & Analyse des Réseaux

**Matrice d'Incidence**  $A_a = (a_{ij})$  : décrit un graphe

$\forall$  colonne  $\leftrightarrow$  1 branche &  $\forall$  ligne  $\leftrightarrow$  1 nœud

- $a_{ij} = +1$  si la branche  $j$  est incidente au nœud  $i$  et est orientée vers lui
- $a_{ij} = -1$  si la branche  $j$  est incidente au nœud  $i$  et s'éloigne de lui
- $a_{ij} = 0$  si le nœud  $i$  n'est pas une extrémité de la branche  $j$

Exemple :



$$A_a = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\text{Rang}(A_a) < n$  (car  $\sum$  lignes de  $A_a \equiv 0$  ( $\forall$  col.  $\ni -1, +1$ ) et  $n$  lignes non lin. indép.)

Suppression d'une ligne de  $A_a$  : ( $\leftrightarrow$  Nœud de Référence = « terre » ou « masse »)

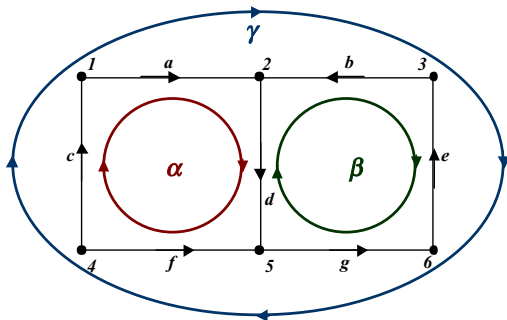
$\rightarrow$  Matrice d'Incidence Réduite  $A$ ,  $\Delta(A) \neq 0$  et  $\text{Rang}(A) = n - 1 = \rho = \text{Rang de } G$

# Théorie des Graphes & Analyse des Réseaux

**Matrices de Mailles**  $B = (b_{ij})$  : décrit un ensemble de mailles dans un graphe

$\forall$  colonne  $\leftrightarrow$  une branche &  $\forall$  ligne  $\leftrightarrow$  une maille orientée

- $b_{ij} = +1$  si la branche  $j \in$  à la maille  $i$  et si leurs orientations coïncident
- $b_{ij} = -1$  si la branche  $j \in$  à la maille  $i$  et si leurs orientations sont opposées
- $b_{ij} = 0$  si la branche  $j \notin$  à la maille  $i$



$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} & \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

•  $\forall$  matrice de mailles est  $\perp$  à la matrice d'incidence :

$$A_a B^T \equiv B A_a^T \equiv 0$$

# Théorie des Graphes & Analyse des Réseaux

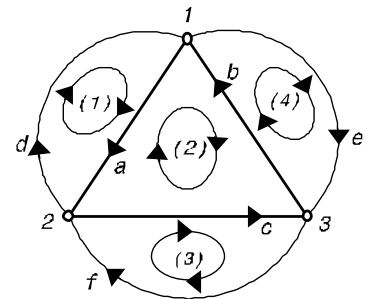
**Mailles Indépendantes :** Aucune maille n'est une combinaison des autres  
 ( $\leftrightarrow$  combili dans la matrice  $B$ )

$\rightarrow$  **Rang ( $B$ )** =  $\mu$  = nullité du graphe = nombre de chaînons

(soit  $T$  un arbre de  $G \rightarrow \exists 1!$  parcours entre deux extrémités - sinon l'arbre  $\ni$  maille  
 $\rightarrow$  ce parcours + un chaînon = maille de  $G$   
 $\rightarrow \forall$  maille comprend  $1!$  Chaînon  $\rightarrow \forall$  chaînon engendre  $1!$  Maille)

## Cas Particulier : Graphe Planaire

- **Graphe Planaire** := si représentable sur un plan :  
 les seuls points communs des branches sont les noeuds
- **Fenêtre** :=  $\forall$  portion du plan délimitée par des branches
- Ensemble des mailles définies par les fenêtres :  
 $\equiv$  **Système de Mailles Indépendantes**

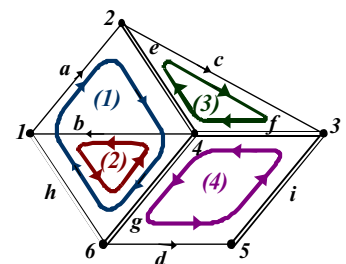


## Mise en Equation des Réseaux

### Courants de Mailles et de Branches

$$I = B^T I_m$$

- **Courant de Maille** :  $i_m$   
 = Courant dans le chaînon qui définit la maille
- **Courant de Branche** :  $i$   
 =  $\Sigma$  des courants  $i_m$  des mailles qui contiennent la branche

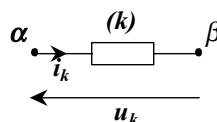


### Tensions de Branches et Potentiels des Nœuds

$$U = -A^T V$$

- Noeud  $n$   $\leftrightarrow$  ligne supprimée dans  $A_a \rightarrow A$   
 $\leftrightarrow$  **référence** choisie pour représenter le potentiel des autres nœuds

- **Potentiel de Nœud** :  $v_\alpha$
- **Tension de Branche** :  $u_k$



$$u_k = v_\alpha - v_\beta$$

$$= -a_{\alpha k} v_\alpha - a_{\beta k} v_\beta$$

# Mise en Equation des Réseaux

## Analyse des Réseaux Electriques

Etude de réseaux  $\ni$  : résistances, capacités, inductances propres et mutuelles, sources indépendantes de tension et de courant

$\rightarrow$  **2b inconnues** = **b tensions de branches** + **b courants de branches**

- Lemmes de Kirchhoff de 1<sup>ère</sup> espèce :

$\Sigma$  des courants des branches indicielles au même noeud = 0

$\rightarrow \forall$  les noeuds du réseau :  $\boxed{A \cdot I = 0}$  ( $\rho$  éq. indép.)

- Lemmes de Kirchhoff de 2<sup>ème</sup> espèce :

$\Sigma$  des tensions aux bornes d'un ensemble de branches constituant 1 maille = 0

$\rightarrow \forall$  ensemble de mailles :  $\boxed{B \cdot U = 0}$  ( $\mu$  éq. indép.)

- Equations des branches :  $\rightarrow$  (**b équations indépendantes**)

$\rightarrow$  **3** systèmes d'équations, indépendants entre eux

$\rightarrow$  Transformée de Laplace  $\rightarrow \rho + \mu + b = 2b$  **éq. lin. et indépendantes**

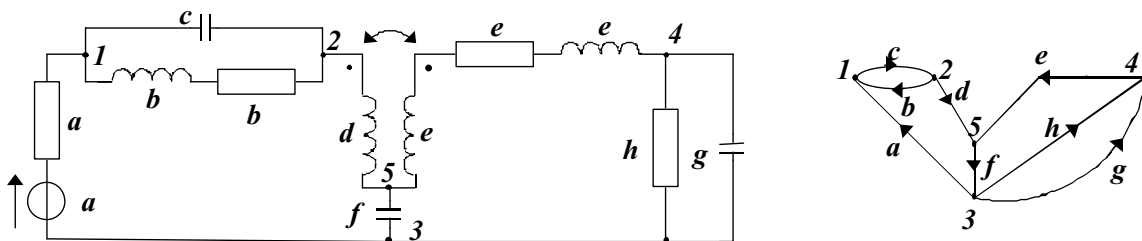
# Mise en Equation des Réseaux

## Structure du Graphe (G) Associé à un Réseau

**G à définir**  $\rightarrow$  obtenir un système d'équations avec un nombre minimum d'inconnues !

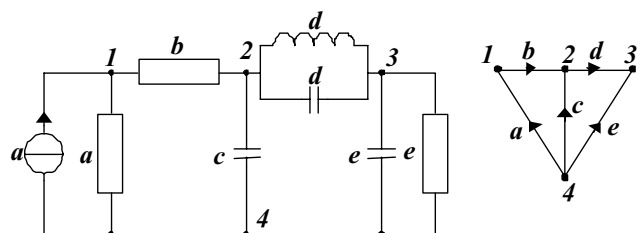
1. Analyse par la **Méthode des Courants Indépendants** ( $\mu$  mailles)

Branche de **G**  $\leftrightarrow$  bipôle constitué par plusieurs bipôles passifs, connectés en série



2. Analyse par la **Méthode des Potentiels Indépendants** ( $n-1$  noeuds)

Branche de **G**  $\leftrightarrow$  bipôle constitué par des éléments passifs, connectés en parallèle

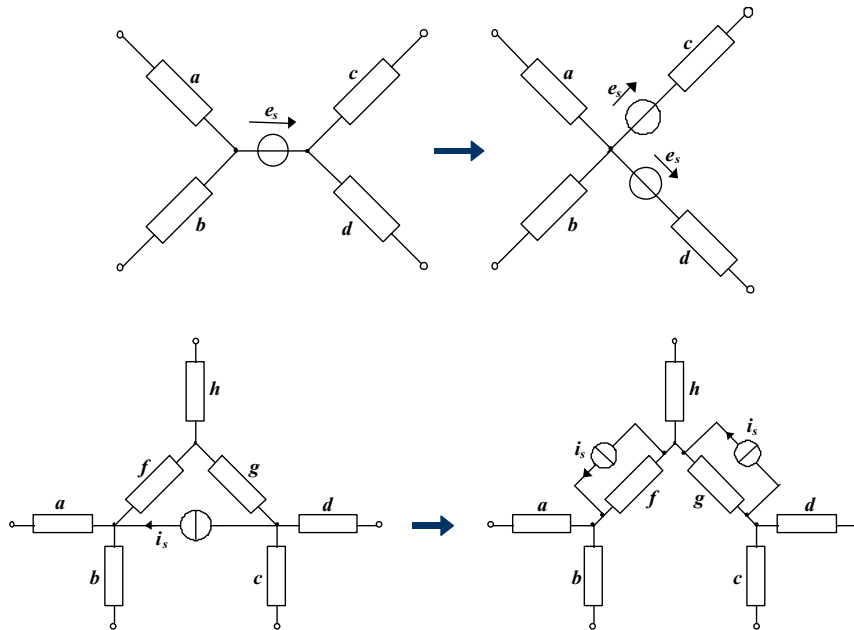


En principe, Approche 2 plus intéressante que Approche 1 si :  $n - 1 < \mu$

## Mise en Equation des Réseaux

Dans les deux cas :  $\forall$  **branche**  $\leftrightarrow$  **un ou plusieurs éléments passifs** :

- Une source isolée ne correspond pas à une situation saine du point de vue physique
- Il est toujours possible de procéder à une transformation du réseau donné lorsque la résistance interne d'une source de courant est négligeable

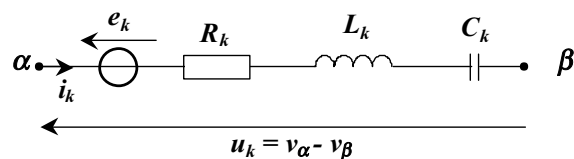


## Méthode des Courants Indépendants

$\rightarrow$  Système d'équations en les  $\mu$  courants de mailles indépendantes

### Branches avec Sources de Tension Indépendantes

Structure d'une Branche  $k$  :



$\rightarrow$  Aux bornes de  $k$  :

$$u_k = e_k + \left[ R_k i_k + \sum_{l=1}^b L_{kl} \frac{di_l}{dt} + u_{Ck}(0) \epsilon(t) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k d\tau \right] \quad t \geq 0$$

- Si  $\exists$  couplage par induction mutuelle :  $L_{kl} = L_{lk}$
- Si pas de couplage :  $L_{kl} = 0$  ( $k \neq l$ ),  $L_{kk} = L_k$
- Si pas de résistance ou pas d'inductance :  $R_k = 0$  ou  $L_k = 0$
- Si pas de capacité  $C_k = \infty$

$\rightarrow$  Conditions sur les sources pour assurer la continuité de l'état énergétique du réseau :

$$\left. \begin{aligned} i_l(0^-) &= i_l(0^+) = i_l(0) \\ u_{Ck}(0^-) &= u_{Ck}(0^+) = u_{Ck}(0) \end{aligned} \right\} \quad l, k = 1, 2, \dots, b$$

## Méthode des Courants Indépendants

**Transformée de Laplace**  $\rightarrow U_k = \left[ E_k - \sum_{l=1}^b L_{kl} \dot{i}_l(0) + \frac{u_{ck}(0)}{p} \right] + \left[ R_k I_k + \sum_{l=1}^b L_{kl} p I_l + \frac{1}{C_k p} I_k \right]$

Pour l'ensemble du Réseau  $\rightarrow$  Relation Matricielle :  $U = \left[ E - Mi(0) + \frac{u_c(0)}{p} \right] + ZI$

**Avec :**

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_b \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_b \end{pmatrix}$$

$$i(0) = \begin{pmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ \vdots \\ i_b(0) \end{pmatrix} \quad u_c(0) = \begin{pmatrix} u_{c1}(0) \\ u_{c2}(0) \\ \vdots \\ u_{cb}(0) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1b} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{b1} & L_{b2} & L_b \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + L_{11}p + \frac{1}{C_1p} & L_{12}p & L_{1b}p \\ L_{21}p & R_2 + L_{22}p + \frac{1}{C_2p} & L_{2b}p \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ L_{b1}p & L_{b2}p & R_b + L_{bb}p + \frac{1}{C_bp} \end{pmatrix}$$

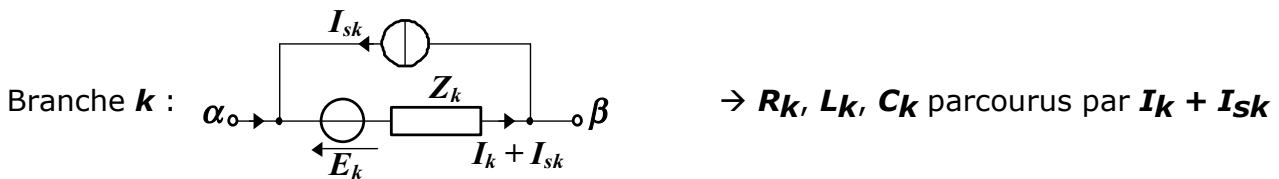
**Z = Matrice des Impédances de Branches :**

$$\begin{cases} R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p} = Z_k(p) = \text{imp. branchek} \\ L_{kl} \cdot p = Z_{kl}(p) = \text{imp. couplage entre ketl} \end{cases}$$

- Couplage magnétique réciproque ( $L_{kl} = L_{lk}$ )  $\rightarrow$  **M** et **Z** = matrices symétriques
- Si réseau sans inductances mutuelles  $\rightarrow$  **M** et **Z** = matrices diagonales
- Si régime sinusoïdal : **U, I**  $\rightarrow$  substitués complexes ; **Z(p)**  $\rightarrow$  **Z(j $\omega$ )**

## Méthode des Courants Indépendants

### Branches avec Sources de Tension et Sources de Courant Indépendantes



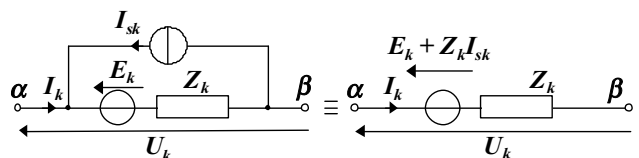
$\rightarrow$  Soit  $I_s = (I_{s1}, I_{s2}, \dots, I_{sb})^T$   $\rightarrow U = \left[ E - Mi(0) + \frac{u_c(0)}{p} + ZI_s \right] + ZI$   $= E_t + ZI$

$\rightarrow E_t$  = Vecteur des **Sources de Tensions Totales de branches**  $= E + E^{(1)} + E^{(2)}$

▪ **Sources Fictives :**  $E^{(1)} = -Mi(0) + \frac{u_c(0)}{p}$   $\equiv$  Action des **C.I.** (= 0 si régime sinus.)

▪ **Sources de Tension équivalentes aux Sources de Courant :**  $E^{(2)} = ZI_s$

$\rightarrow$  Transformation de  $\forall$  source de courant en source de tension équivalente :



## Méthode des Courants Indépendants

---

### Analyse d'un Réseau Electrique – Cas Général

- Choix (*arbitraire*) d'un ensemble de  $\mu$  mailles indépendantes (*si calcul de quelques courants de branches seulement : les faire correspondre aux courants de mailles*)
- Expression des courants de branches en fct des courants de mailles :  $I = B^T I_m$
- Equations de K. de 1<sup>ère</sup> espèce  $\rightarrow AI = AB^T I_m \equiv 0$  (tjrs vrai car  $A \perp B$ )
- Equations de K. de 2<sup>nde</sup> espèce  $\rightarrow BU = BE_t + BZB^T I_m = 0$

$\rightarrow$  En posant  $E_m = -BE_t$  et  $Z_m = BZB^T$ , il vient :

$$\boxed{E_m = Z_m I_m} \rightarrow \text{Système des Equations de Mailles, à résoudre}$$

- $E_m$  = vecteur des sources de tension de mailles
- $Z_m$  = matrice des impédances de mailles (matrice carrée symétrique d'ordre  $\mu$ )

### Autres Grandeurs Electriques

$\rightarrow I$  et  $U$  déduits de  $I_m$  :  $I = B^T I_m$  &  $U = E_t + ZI$

## Méthode des Courants Indépendants

---

### Analyse d'un Réseau Complexe (ex : réseaux transport d'énergie électrique)

**Régime Sinusoïdal** :  $Z$  &  $Z_m$  = matrices de nbres  $\mathbb{C}$ ;  $E_m$  &  $I_m$  = vecteurs  $\mathbb{C}$

$\rightarrow$  Résolution d'un système complexe de  $\mu$  équations algébriques linéaires  
 $\equiv$  résolution d'un système réel de  $2\mu$  équations linéaires à  $2\mu$  inconnues

$$E_m = E'_m + jE''_m \quad I_m = I'_m + jI''_m \quad Z_m = R_m + jX_m \quad \rightarrow \begin{cases} E'_m = R_m I'_m - X_m I''_m \\ E''_m = X_m I'_m + R_m I''_m \end{cases}$$

### Analyse d'un Réseau en Fonctionnement Transitoire

$Z$  &  $Z_m$  = Matrices Polynomiales

$\rightarrow$  Résolution implique le traitement de fonctions rationnelles, dont le degré est très élevé si réseau  $\rightarrow$  bcp d'éléments réactifs

$\rightarrow$  **Résolution complexe !**

# Méthode des Courants Indépendants

## Analyse des Réseaux Simples

(si peu de mailles indép.,  $\mu = 2, 3$  ou 4)

→ Possibilité d'écrire directement le système d'équations  $E_m = Z_m I_m$

∀ maille  $\lambda, \mu$  :

- $E_m = \Sigma$  sources de tension réelles ou équivalentes  
→ **signe + si même orientation que la maille, - sinon**

- $Z_m = BZB^T$  → impédance de couplage :

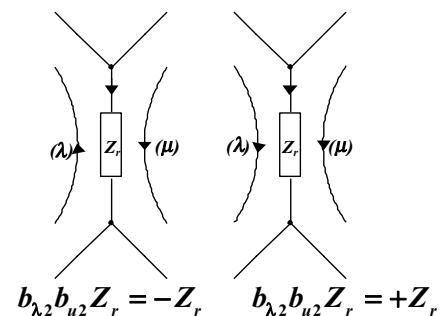
$$Z_m(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^b b_{\lambda j} \left[ \sum_{i=1}^b b_{\mu i} Z_{ij} \right] = \sum_{i,j=1}^b b_{\lambda i} b_{\mu j} Z_{ij}$$

# Méthode des Courants Indépendants

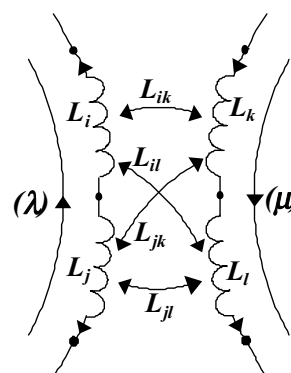
## → Règle de Calcul de la Matrice des Impédances de Mailles :

- **Impédance de couplage**  $Z_m(\lambda, \mu) = \Sigma$  :

- des impédances des branches communes aux mailles  $\lambda$  et  $\mu$ , comptées positivement lorsque les orientations des mailles coïncident, et négativement sinon



- des impédances mutuelles entre chaque branche de  $\lambda$  et chaque branche de  $\mu$ , comptées positivement lorsque les branches sont toutes deux orientées comme les mailles ou toutes deux de façon opposées aux mailles, et négativement sinon



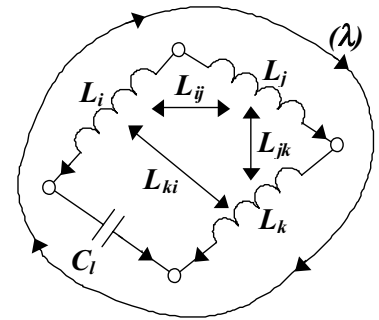
$$\begin{aligned} & b_{\lambda i} b_{\mu k} Z_{ik} + b_{\lambda i} b_{\mu l} Z_{il} \\ & + b_{\lambda j} b_{\mu k} Z_{jk} + b_{\lambda j} b_{\mu l} Z_{jl} \\ & = +pL_{ik} + pL_{il} \\ & \quad - pL_{jk} - pL_{jl} \end{aligned}$$

## Méthode des Courants Indépendants

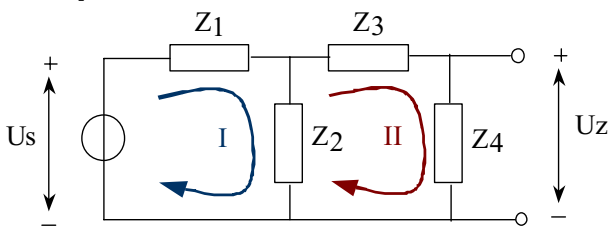
• **Impédance propre**  $Z_m(\lambda, \lambda) = \Sigma :$

- des impédances propres des branches de  $\lambda$ , toutes comptées positivement. (car  $b_{\lambda i}^2 = 1$ )
- des impédances mutuelles entre les branches de  $\lambda$  prises deux à deux, comptées positivement deux fois lorsque les branches sont toutes deux orientées comme la maille, ou toutes deux de façon opposées à la maille, et négativement deux fois sinon

$$\rightarrow Z_{\lambda\lambda}^{(m)} = pL_i + pL_j + pL_k + \frac{1}{pC_i} - 2pL_{ij} - 2pL_{ki} + 2pL_{jk}$$



### Exemple 1



$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}$$

→ Résolution par Cramer...

## Méthode des Courants Indépendants

### Exemple 2 : Conditions d'Equilibre du Pont de Carey-Foster

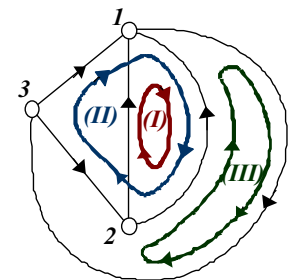
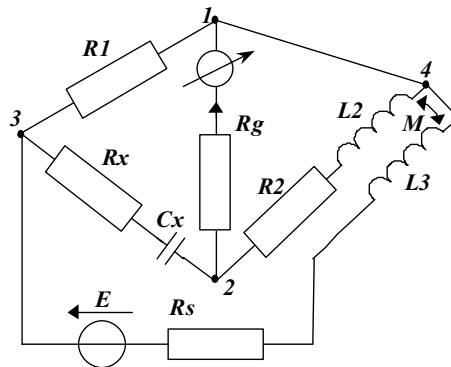
Eléments inconnus :  $R_x, C_x$

Eléments de réglage :  $L_{23}(M), R_1$

$$b = 5 ; n = 3$$

$$\rightarrow \mu = b - n + 1 = 3 \text{ mailles}$$

• **Condition d'Equilibre** :  $I_g = 0$



→ Système de Mailles : tel que la branche du galvanomètre ne contienne qu'1! maille

• Vecteur des Sources :  $E_m = (0 \ 0 \ E)^T$

On Pose :  $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$  ;  $Z_x = R_x + \frac{1}{j\omega C_x}$

$$\rightarrow Z_m = \begin{pmatrix} R_g + Z_2 & Z_2 & -Z_2 - j\omega M \\ Z_2 & R_1 + Z_2 + Z_x & -Z_2 - Z_x - j\omega M \\ -Z_2 - j\omega M & -Z_2 - Z_x - j\omega M & Z_2 + Z_x + R_s + (L_3 + 2M)j\omega \end{pmatrix}$$

## Méthode des Courants Indépendants

- Conditions d'Equilibre  $\rightarrow I_1 = E \cdot \Delta(3,1) / \Delta_m \equiv 0 \rightarrow \Delta(3,1) \equiv 0$
- $\rightarrow -Z_2(Z_2 + Z_x + j\omega M) + (Z_2 + j\omega M)(R_1 + Z_2 + Z_x) \equiv 0$
- $\rightarrow R_1 Z_2 + (R_1 + Z_x)j\omega M \equiv 0$
- $\rightarrow \left[ R_1 R_2 + \frac{M}{C_x} \right] + j\omega [R_1(L_2 + M) + R_x M] \equiv 0$
- $\rightarrow R_x = -R_1(M + L_2) / M \quad C_x = -M / (R_1 R_2)$

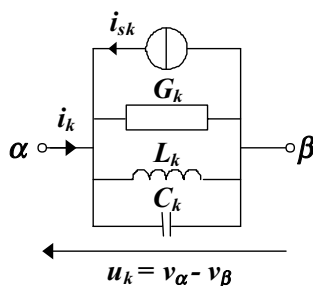
### Remarques :

- Conditions d'équilibre indépendantes de la fréquence :  
**Equilibre du galvanomètre maintenu pour une source E quelconque**
- Equilibre obtenu seulement si le coefficient d'induction mutuelle **M** est négatif :  
**Choix arbitraire fait pour le sens positif des courants dans les branches 2 et 3**

## Méthode des Potentiels Indépendants

- $\rightarrow$  Système d'équations en les **(n-1)** potentiels de nœuds indépendants (*méthode duale*)  
Plus intéressant que la méthode des mailles si **n - 1 < μ**  
(en principe, car **n** et **μ** dépendent de la manière dont on a structuré les branches du réseau)

### Structure des Branches avec Sources de Courant Indépendantes



$\rightarrow$  Courant dans la branche **k** :

$$i_k = -i_{sk} + \left[ G_k u_k + C_k \frac{du_k}{dt} + i_{Lk}(0)\varepsilon(t) + \frac{1}{L_k} \int_0^t u_k d\tau \right] \quad (t \geq 0)$$

- Si pas de résistance / de capacité  $\rightarrow G_k = 0$  /  $C_k = 0$
- Si pas d'inductance  $\rightarrow L_k = \infty$
- Exprimer  $i_{Lk} = fct(u_k)$  uniquement  $\Leftrightarrow$  Pas d'inductances mutuelles !!!

**$\rightarrow$  Si  $\exists$  Inductances Mutuelles  $\rightarrow$  Méthode des Courants Indépendants !**

## Méthode des Potentiels Indépendants

→ **Transformée de Laplace** : (+ continuité de l'état énergétique du réseau en  $t = 0$ )

$$I_k = \left[ -I_{sk} - C_k u_{Ck}(0) + \frac{i_{Lk}(0)}{p} \right] + \left[ G_k + C_k p + \frac{1}{L_k p} \right] U_k \quad (k = 1, 2, \dots, b)$$

→ Pour l'ensemble du Réseau :  $I = - \left[ I_s + C u_c(0) - \frac{i_L(0)}{p} \right] + Y U$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & C_b \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_b \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_b \end{pmatrix}$$

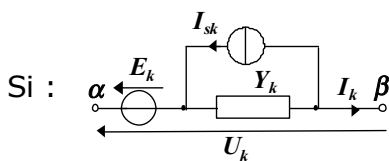
$$I_s = \begin{pmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ \vdots \\ I_{sb} \end{pmatrix}; \quad u_c(0) = \begin{pmatrix} u_{c1}(0) \\ u_{c2}(0) \\ \vdots \\ u_{cb}(0) \end{pmatrix}; \quad i_L(0) = \begin{pmatrix} i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \\ \vdots \\ i_{Lb}(0) \end{pmatrix}$$

$$Y = Z^{-1} = \begin{pmatrix} G_1 + C_1 p + \frac{1}{L_1 p} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 + C_2 p + \frac{1}{L_2 p} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & G_b + C_b p + \frac{1}{L_b p} & \dots \end{pmatrix}$$

- **Y = Matrice des Admittances des Branches** (matrice diagonale)
- $G_k + C_k p + \frac{1}{L_k p} = Y_k(p) = \text{Admittance de la Branche } k$
- Réseau  $\mathcal{D}$  d'inductances mutuelles  $\rightarrow Y_k = Z_k^{-1} \quad Y_{kl} = 0 \quad (k \neq l)$

## Méthode des Potentiels Indépendants

### Branches avec Sources de Courant & Sources de Tension Indépendantes



→ Tension aux bornes de  $G_k, C_k, L_k = U_k - E_k$

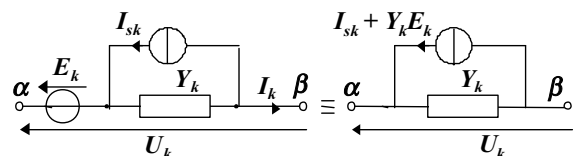
→ Remplacer  $U$  par  $U - E$  :

$$I = - \left[ I_s + C u_c(0) - \frac{i_L(0)}{p} + Y E \right] + Y U \quad \boxed{= -I_{st} + Y U}$$

→  $I_{st}$  = Vecteur des **Sources de Courant Totales de Branches**  $= I_s + I_s^{(1)} + I_s^{(2)}$

- **Sources Fictives** :  $I_s^{(1)} = C u_c(0) - \frac{i_L(0)}{p} \equiv \text{Action des C.I. (= 0 si rég. sinus.)}$
- **Sources de Courant Equivalentes aux Sources de Tension** :  $I_s^{(2)} = Y E$

→ Transformation de  $\forall$  source de tension en source de courant équivalente :



# Méthode des Potentiels Indépendants

## Analyse d'un Réseau électrique – Cas Général

- Choix d'un nœud de référence
- Expression des tensions de branches = fct (potentiels des nœuds) :  $U = -A^T V$
- Eq. de Kirchhoff de 2<sup>nde</sup> espèce  $\rightarrow BU = -BA^T V \equiv 0$  (tjrs vrai car  $A \perp B$ )
- Eq. de Kirchhoff de 1<sup>ère</sup> espèce  $\rightarrow AI = -AI_{st} - AYA^T V = 0$

En posant  $I_n = -AI_{st}$  et  $Y_n = AYA^T$ , il vient :

$$\boxed{I_n = Y_n V} \quad \rightarrow \text{Système des Equations Nodales, à résoudre}$$

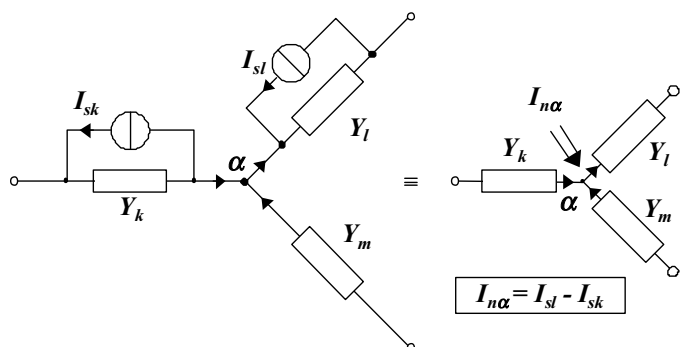
- $I_n$  = vecteur des courants injectés aux nœuds
- $Y_n$  = matrice des admittances nodales (matrice carrée symétrique d'ordre  $p = n-1$ )

# Méthode des Potentiels Indépendants

## Analyse de réseaux simples (si peu de nœuds indép. : $p = 2, 3$ ou 4)

- De  $I_n = -AI_{st}$  on a, au nœud  $\alpha$  :

$$I_{n\alpha} = -\sum_{k=1}^b a_{\alpha k} I_{sk}$$



- $\rightarrow$  Le courant injecté en chaque nœud provient d'une source unique  
**:= Injecteur de Courant**

(physiquement : injecteur = source de courant dont l'autre borne  $\leftrightarrow$  nœud de référence)

- De  $Y_n = AYA'$  on a, entre les nœuds  $\alpha$  et  $\beta$  :  $Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^b a_{\alpha i} a_{\beta j} Y_{ij}$

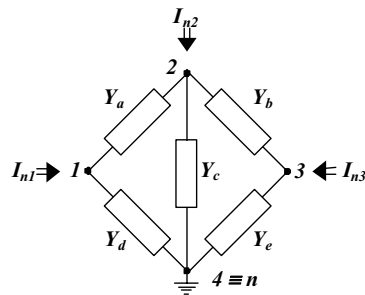
## Méthode des Potentiels Indépendants

### Règle de Calcul de la Matrice Nodale :

- Admittance de couplage  $Y_n(\alpha, \beta)$  = admittance de la branche qui joint  $\alpha$  et  $\beta$ , prise avec un **signe opposé** (si la branche  $i$  joint les nœuds  $\alpha$  et  $\beta$ , on a  $a_{\alpha i} a_{\beta i} = -1$ )
- Si plusieurs branches joignent les nœuds  $\alpha$  et  $\beta$  →  $\Sigma$  de leurs admittances
- Admittance propre  $Y_n(\alpha, \alpha) = \Sigma$  des admittances des branches incidentes en  $\alpha$   
( $\forall$  branche  $i$  incidente au nœud  $\alpha$ , on a  $a_{\alpha i}^2 = +1$ )

→ Dans  $\mathbf{Y}_n$ , la  $\Sigma$  des termes d'une même ligne (d'une même colonne) = admittance de la branche qui joint le nœud associé à cette ligne (à cette colonne) au nœud de réf.

### Exemple :



$$\begin{pmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ I_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_a + Y_d & -Y_a & 0 \\ -Y_a & Y_a + Y_b + Y_c & -Y_b \\ 0 & -Y_b & Y_b + Y_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

## Méthode des Potentiels Indépendants

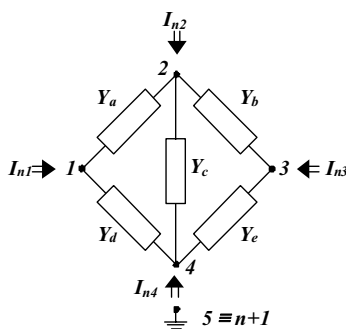
### Matrice Flottante (ou Indéfinie) :

→ Si besoin de repérer les potentiels des  $n$  nœuds / nœud ( $n+1$ ), extérieur au réseau

### Propriétés :

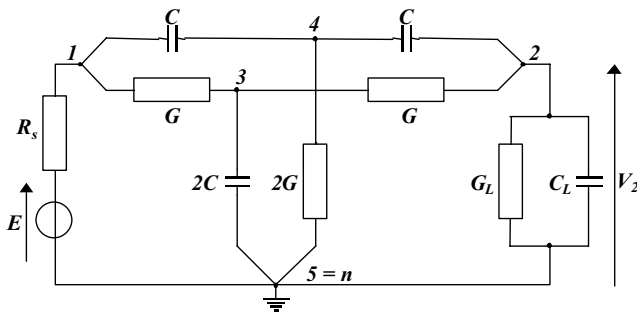
- Nœud de Référence =  $(n+1)^e$  nœud, extérieur au réseau → système  $\ni n$  équations  
→ la matrice flottante est d'ordre  $n$ , mais elle est de rang  $\leq (n-1)$   
( $\Sigma$  des termes de chaque colonne = 0, car aucun nœud connecté au nœud de réf.)

- L'ensemble des  $n$  injecteurs de courant constitue une coupe →  $\sum_{\alpha=1}^n I_{n\alpha} = 0$



$$\begin{pmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ I_{n3} \\ I_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_a + Y_d & -Y_a & 0 & -Y_d \\ -Y_a & Y_a + Y_b + Y_c & -Y_b & -Y_c \\ 0 & -Y_b & Y_b + Y_f & -Y_f \\ -Y_d & -Y_c & -Y_f & Y_c + Y_d + Y_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

## Exemple : Transmission d'un Signal à travers un Biporte



→ Empêcher la transmission d'un signal sinusoïdal à  $f_0$  de l'accès (1,5) vers l'accès (2,5)

→ **Fréquence Bloquée =  $fct. (R,C)$  ?**

→ **Système des Equations Nodales :**

$$(I = E/R_s)$$

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_s + G + j\omega C & 0 & -G & -j\omega C \\ 0 & G + G_L + j\omega(C + C_L) & -G & -j\omega C \\ -G & -G & 2(G + j\omega C) & 0 \\ -j\omega C & -j\omega C & 0 & 2(G + j\omega C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

→  $V_2/V_1 = -\Delta(1,2)/\Delta(1,1)$

→ Aucun signal transmis à  $f_0$  :  $\Delta(1,2) = 0$  ( $\Delta(1,1) \neq 0$ )

## Exemple : Transmission d'un Signal à travers un Biporte

$$\Delta(1,2) = \begin{vmatrix} 0 & -G & -j\omega C \\ -G & 2(G + j\omega C) & 0 \\ -j\omega C & 0 & 2(G + j\omega C) \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \& \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

(+ vérifier que  $\Delta(1,1) \neq 0$  pour cette fréquence)

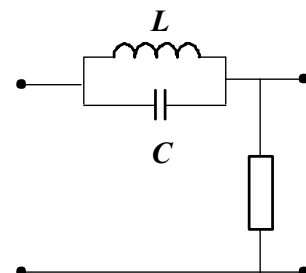
- **Exemple :**  $R = 10^6 \Omega$ ,  $C = 10^{-6} F$  →  $f_0 \approx 0.16 Hz$

→ possibilité de bloquer de très petites fréquences avec un circuit  $R, C$  !

- **Comparaison :** « Circuit Bouchon »

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

→ Si  $C = 10^{-6} F$  → il faut  $L = 10^6 H$  !!!



## Réseaux avec Sources Dépendantes

---

### Structure des Sources Dépendantes

∃ 4 types de Sources Dépendantes :

(coefficients  $a, r, g, \alpha =$  nombres réels)

- $E_k = aU_l$
- $E_k = rI_l$
- $I_k = gU_l$
- $I_k = \alpha I_l$

**Transformations** de Sources Dépendantes : Toujours Possible !

- Commande par un *Courant de Branche* : lié à la *tension* aux bornes de la branche
- Commande par une *Tension de Branche* : liée au *courant* dans la branche

→ Convertir  $\forall$  sources dépendantes d'un réseau : **sources toutes de même type !**

**Hypothèses :**

- **Sources de Tension** commandées par un **Courant**
- **Sources de Courant** commandées par une **Tension**

---

## Réseaux avec Sources Dépendantes

- Réseaux avec **Sources de Tensions** commandées par un **Courant**  
→ Analyse plus aisée par la **Méthode des Courants Indépendants**
- Réseaux avec **Sources de Courant** commandées par une **Tension**  
→ Analyse plus aisée par la **Méthode des Potentiels Indépendants**

→ **Nouveau Système d'Equations** :

1. Mise en équation en considérant les sources dépendantes (**tension/courant**) comme étant « connues » ;
2. Expression de ces sources en fonction des inconnues (**courants de mailles/potentiels de nœuds**) ;
3. Elimination des inconnues par changement de membre dans le système d'équations ;

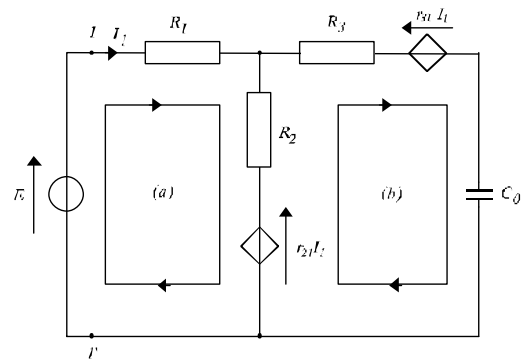
→  **$Z_m / Y_n$  ne sont plus symétriques !**

# Réseaux avec Sources Dépendantes

## Exemples

$$\rightarrow Z = E / I_1 = ?$$

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + r_{21} & -R_2 \\ -R_2 - r_{21} + r_{31} & R_2 + R_3 + \frac{1}{C_0 p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow I_1 = I_a = E \cdot \Delta(1,1) / \Delta_m \quad \rightarrow Z = E / I_1 = \Delta_m / \Delta(1,1)$$

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_a + G_b & 0 & -G_a \\ +g & G_d + C_e p & -G_d - g \\ -G_a - g & -G_d & G_a + G_d + G_c + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

