

CHAPITRE 6

QUADRIPOLES

Samuel J. Mason (1921-1974). Ingénieur électricien diplômé de Rutgers University, il succéda à Ernst Guillemin et devint professeur de théorie des circuits au MIT de 1954 à sa mort. On lui doit d'avoir introduit de nombreuses notions, notamment sur les graphes de fluence. Il dirigea également le groupe de traitement cognitif de l'information chez AT&T et travailla sur le scanner et la reconnaissance des caractères. Le Prof. Mason était reconnu pour ses qualités de pédagogue enthousiaste.



Le quadripôle (Fig. 6.1) a déjà introduit au chapitre 1. Nous en avons également reparlé au chapitre 4, pour introduire la notion de fonction de transfert.

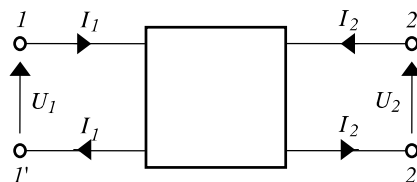


Fig. 6.1 Quadripôle

Très souvent, le quadripôle est en fait un tripôle, en ce sens qu'une borne de l'entrée et une borne de la sortie sont reliées par un court-circuit interne. On le représentera dans ce cas par la Fig. 6.2. Ces bornes communes sont le plus souvent mises à la terre. Le conducteur commun $1' 2'$ est appelé *masse*.

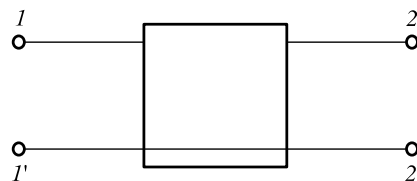


Fig. 6.2 Tripôle

Les quadripôles jouent un rôle fondamental dans l'analyse de nombreux systèmes, spécialement en télécommunications ou en automatique. Dans ce chapitre, nous en étudierons plus complètement les propriétés.

6.1 Matrices représentatives des quadripôles

On appelle *entrée* l'accès 11' et *sortie* l'accès 22'. On a supposé à la Fig. 6.1 que le courant sortant des bornes 1' et 2' sont identiques à ceux entrant en 1 et 2. Cette hypothèse implique en fait que le quadripôle est utilisé en tant que *biporte*¹. Cette condition est peu contraignante : en général, on place un dipôle (source) à l'entrée 11' et un autre dipôle (charge) en 22'.

De même qu'un dipôle possède deux grandeurs aux accès dont une seule est indépendante, un quadripôle possède 4 grandeurs aux accès, dont seulement deux sont indépendantes. On ne peut en effet pas imposer simultanément la tension et le courant à l'un quelconque des accès.

Si les éléments qui composent le quadripôle sont linéaires, les relations qui lient les deux grandeurs dépendantes P_1 et P_2 aux deux grandeurs indépendantes R_1 et R_2 sont elles-mêmes linéaires et peuvent être mises sous la forme générale (opérationnelle²):

$$\begin{bmatrix} P_1(p) \\ P_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & Q_{12}(p) \\ Q_{21}(p) & Q_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(p) \\ R_2(p) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Comme il y a 6 façons de choisir deux grandeurs indépendantes parmi 4, l'expression (6.1) peut être déclinée en 6 versions. Nous verrons plus loin qu'elles présentent toutes un intérêt spécifique lorsqu'on procède à l'*association* de quadripôles.

6.1.1 Matrice d'impédance

La matrice d'impédances est définie par (6.2).

$$\begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

On mesure la valeur des éléments de cette matrice en imposant une source à un accès et laissant l'autre en circuit ouvert (Fig. 6.3).

Ainsi par exemple si la sortie est à circuit ouvert, l'équation (6.2) se réduit à :

$$Z_{11}(p) = \left. \frac{U_1(p)}{I_1(p)} \right|_{I_2=0} \quad (6.3)$$

De même :

¹ On devrait en toute rigueur parler le plus souvent de biportes (*two-ports*) plutôt que de quadripôles. Le terme de quadripôle est cependant le plus fréquent dans la littérature francophone.

² Il est clair que dans le cas d'un fonctionnement en régime sinusoïdal, les grandeurs opérationnelles se réduisent à des grandeurs complexes, voire à des grandeurs réelles dans le cas d'un régime continu.

$$Z_{12}(p) = \left. \frac{U_1(p)}{I_2(p)} \right|_{I_1=0} \tag{6.4}$$

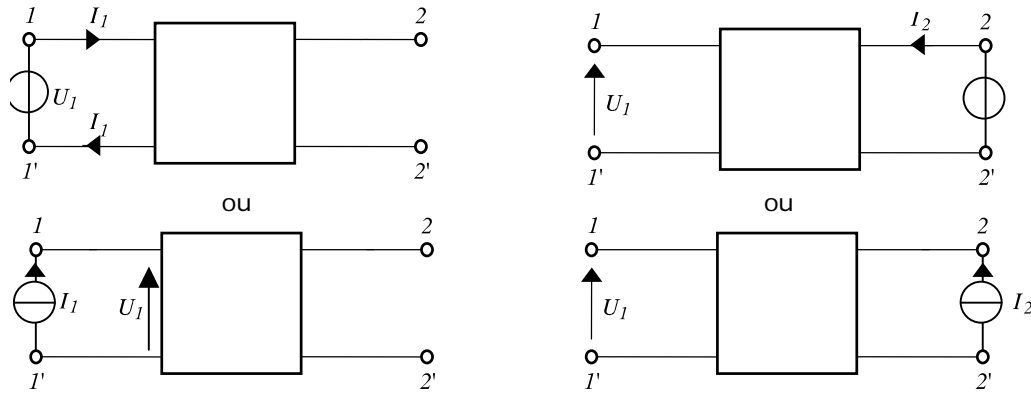


Fig. 6.3 Mesure de Z_{11} (gauche) et Z_{12} (droite)

Et ainsi de suite pour les autres éléments. Il s'ensuit que Z_{11} est appelée *impédance d'entrée à circuit ouvert* et Z_{22} *impédance de sortie à circuit ouvert*. De façon similaire, Z_{12} et Z_{21} sont les *impédances de transfert à circuit ouvert*.

Exemple 6.1

Les quadripôles de la Fig. 6.4 ont respectivement pour matrices d'impédances :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix}$$

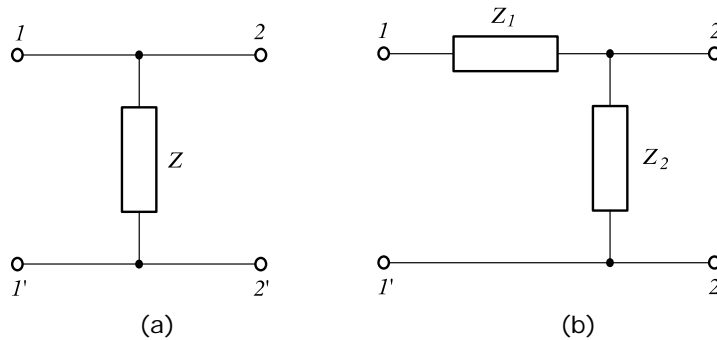


Fig. 6.4 Deux quadripôles très simples

Exemple 6.2

L'impédance d'entrée à vide d'un amplificateur opérationnel idéal monté en isolateur d'impédance (Fig. 6.5) est donnée par :

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Or on a : $U_1 - (R_i + R_o + AR_i)I_1 = 0$

Il vient donc : $Z_{11} = R_i + R_o + AR_i \approx (1 + A)R_i$, ce qui constitue une valeur très élevée (bien plus élevée que la valeur de l'impédance en boucle ouverte R_i).

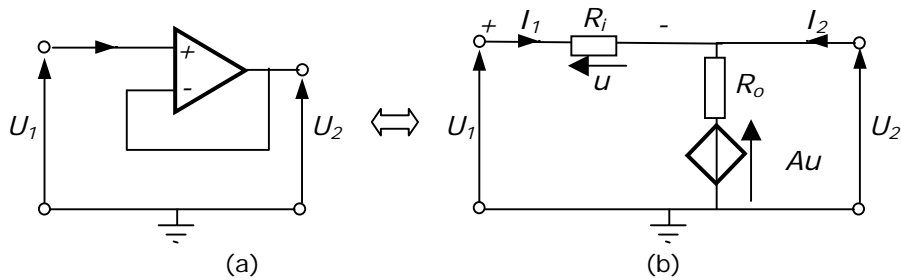


Fig. 6.5 Ampli op. en isolateur d'impédance et quadripôle équivalent

6.1.2 Matrice d'admittance

La matrice d'impédances est définie par (6.5).

$$\begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

La matrice **Y** est évidemment l'inverse de la matrice **Z**. Elle n'existe donc pas toujours (il faut que **Z**, si elle existe, soit inversible)³.

On mesure la valeur des éléments de cette matrice en imposant une source à un accès et en mettant l'autre en court-circuit (Fig. 6.6).

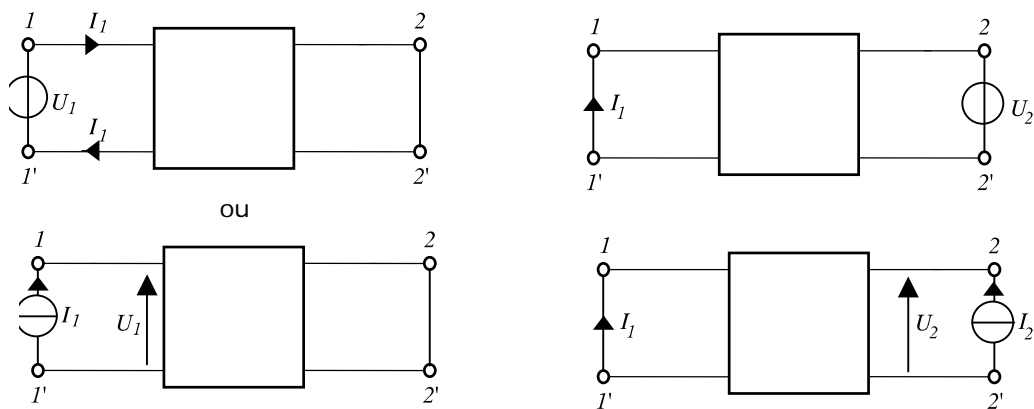


Fig. 6.6 Mesure de Y_{11} (gauche) et Y_{12} (droite)

Ainsi par exemple si la sortie est en court-circuit, l'équation (6.5) se réduit à :

$$Y_{11}(p) = \left. \frac{I_1(p)}{U_1(p)} \right|_{U_2=0} \tag{6.6}$$

De même :

³ De même, **Z** n'existe pas toujours.

$$Y_{12}(p) = \left. \frac{I_1(p)}{U_2(p)} \right|_{U_1=0} \tag{6.7}$$

Et ainsi de suite pour les autres éléments.

Y_{11} est appelée *admittance d'entrée en court-circuit* et Y_{22} *admittance de sortie en court-circuit*. Y_{12} et Y_{21} sont les *admittances de transfert en court-circuit*.

Exemple 6.3

Le quadripôle en shunt de la Fig. 6.4(gauche) n'a pas de matrice d'admittance : \mathbf{Z} n'est pas inversible.

Par contre le quadripôle de la Fig. 6.7 a pour matrice d'admittance :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$$

Il ne possède pas de matrice d'impédance (\mathbf{Y} est non-inversible).

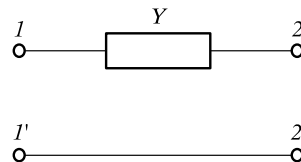


Fig. 6.7 Un quadripôle très simple

Exemple 6.4

L'admittance de sortie en court-circuit d'un amplificateur opérationnel idéal monté en isolateur d'impédance (Fig. 6.5) est donnée par :

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

Il vient facilement : $Y_{22} = \frac{1}{R_i} + \frac{1+A}{R_o} \approx \frac{1+A}{R_o}$, ce qui constitue une valeur très élevée (bien plus élevée que la valeur de l'admittance en boucle ouverte R_o).

6.1.3 Matrices de chaîne

Si les deux grandeurs indépendantes sont relatives au même accès, la matrice est appelée *matrice de chaîne T (de transmission)*. On l'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

ou sous la forme :

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

pour la matrice de chaîne \mathbf{t} .

Exemple 6.5

Le quadripôle en shunt de la Fig. 6.4(gauche) a pour matrice de chaîne :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le transformateur idéal, \mathbf{T} est donné par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

6.1.4 Matrices hybrides

Les matrices *hybrides* correspondent au cas où les variables indépendantes sont de nature différente, un courant et une tension, relatives à des accès différents :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Contrairement aux matrices d'impédance et d'admittance, les éléments des matrices hybrides ne sont évidemment pas homogènes. Deux éléments n'ont pas de dimensions et sont des coefficients de transfert en courant ou en tension. Les deux autres ont l'un la dimension d'une impédance, l'autre celui d'une admittance.

Exemple 6.6

Le quadripôle en shunt de la Fig. 6.4.a a pour paramètres hybrides :

$$h_{11} = 0, h_{12} = 1, h_{21} = -1, h_{22} = 1/Z$$

Le transformateur idéal n'a ni matrice d'admittance, ni matrice d'impédance. Ses paramètres hybrides sont :

$$h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = n, h_{21} = -n$$

6.2 Relations entre matrices

On peut établir des relations entre tous les éléments de ces matrices. Ainsi par exemple, les éléments de \mathbf{H} sont exprimables en fonction des paramètres \mathbf{Z} et \mathbf{Y} . Pour $U_2=0$, il vient en effet :

$$U_1 = h_{11}I_1 \quad I_2 = h_{21}I_1 \quad (6.12)$$

De la première équation on déduit :

$$h_{11} = \frac{1}{Y_{11}} \quad (6.13)$$

et de la seconde :

$$h_{21} = Y_{21} / Y_{11} \quad (6.14)$$

Nous n'entrerons pas dans les détails ; tous les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

	z		y		h		g		T		t	
z	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$-\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	Z_{21}	Z_{22}	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta T}{c}$	$\frac{a}{c}$
y	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$	$-\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
	$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta t}{b}$	$\frac{c}{a}$
h	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$-\frac{\Delta t}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$\frac{\Delta T}{A}$	$-\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta t}{d}$	$\frac{b}{d}$
T	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta t}$	$\frac{b}{\Delta t}$
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta t}$	$\frac{a}{\Delta t}$
t	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{12}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$-\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta T}$	$\frac{B}{\Delta T}$	a	b
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{12}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta T}$	$\frac{A}{\Delta T}$	c	d

Tableau 6.1 Equivalences entre éléments des matrices représentatives des quadripôles

6.3 Association de quadripôles

Nous avons vu précédemment que tout quadripôle (passif ou actif, quel que soit le nombre d'éléments qu'il comprenne) est complètement caractérisé par les 4

éléments d'une de ses matrices représentatives. L'intérêt du quadripôle réside essentiellement dans la compacité de ces représentations matricielles. Il est alors facile de construire des quadripôles plus évolués, en associant des quadripôles plus simples.

6.3.1 Quadripôles en parallèle

La mise en parallèle de deux quadripôles Q' et Q'' est illustrée à la Fig. 6.8. Les tensions aux accès des deux quadripôles sont imposées égales (ce qui caractérise une mise en parallèle d'éléments). Chaque quadripôle est caractérisé par ses équations :

$$I' = Y'U' \quad I'' = Y''U'' \quad (6.15)$$

Et comme on a :

$$I = I' + I'' \quad U = U' = U'' \quad (6.16)$$

Il vient alors immédiatement :

$$\boxed{I = YU \quad \text{avec} \quad Y = Y' + Y''} \quad (6.17)$$

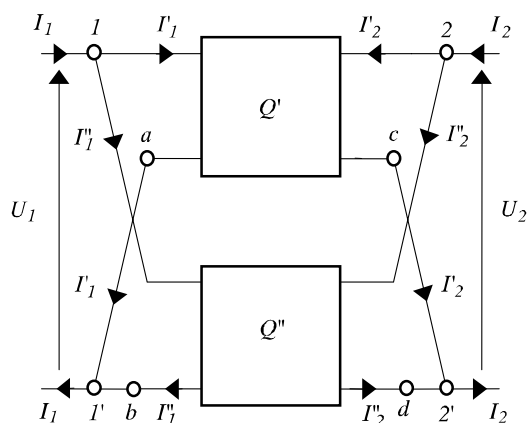


Fig. 6.8 Mise en parallèle de quadripôles

La relation (6.17) n'est cependant valable qu'à deux conditions⁴ :

- que Y' et Y'' existent
- que la mise en parallèle maintienne le fonctionnement en biporte de chaque quadripôle (autrement dit, que le courant sortant en a (respectivement b , c , d) soit bien égal au courant I'_1 (respectivement I''_1 , I'_2 , I''_2). Les équations (6.15) ne sont en effet vérifiées que dans ce cas là.

Cette deuxième condition peut ne pas être vérifiée si la mise en parallèle fait apparaître des courants *de circulation* tels que ceux indiqués à la Fig. 6.9 .

⁴ Il n'est évidemment ni impossible ni illicite d'associer en parallèle deux quadripôles ne respectant pas ces conditions.

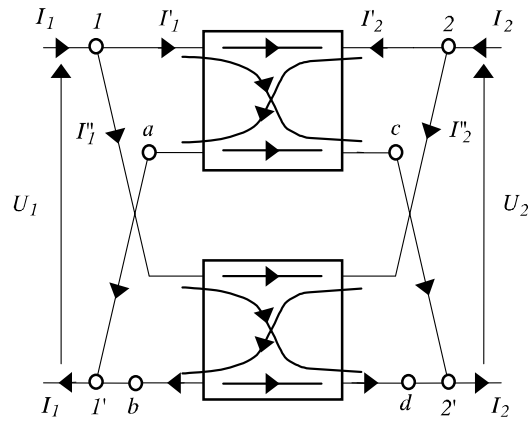


Fig. 6.9 Courants de circulation

La vérification de cette condition porte le nom de *test de Brune*. Ce test est basé sur le principe de superposition. En effet, pour vérifier que la mise en parallèle ne provoque aucun courant de dérivation, dans le cas général où on place des sources aux accès 11' et 22' du quadripôle résultant, il suffit de vérifier que c'est bien le cas lorsqu'on impose une source (par exemple une source de tension) à l'accès 11' et que l'on annule la tension à l'accès 22' (Fig. 6.10.a, où le courant de circulation est noté I_c ; une valeur nulle de I_c implique en effet que les deux quadripôles fonctionnent en biportes). Le test de Brune consiste donc à mesurer la tension U aux bornes de l'interrupteur de la Fig. 6.10.b : si cette tension est nulle, le courant I_c après fermeture de l'interrupteur sera nul lui aussi. On répète ensuite l'opération en imposant la tension de sortie et en court-circuitant les entrées.

En pratique, évidemment, la « mesure » de U peut être obtenue par calcul. On impose des sources opérationnelles $U_1(p)$ et $U_2(p)$ et on calcule $U(p)$ dans les deux cas ($U_1=0$ et $U_2=0$). $U(p)$ doit être identiquement nul à chaque fois pour que (6.17) soit applicable.

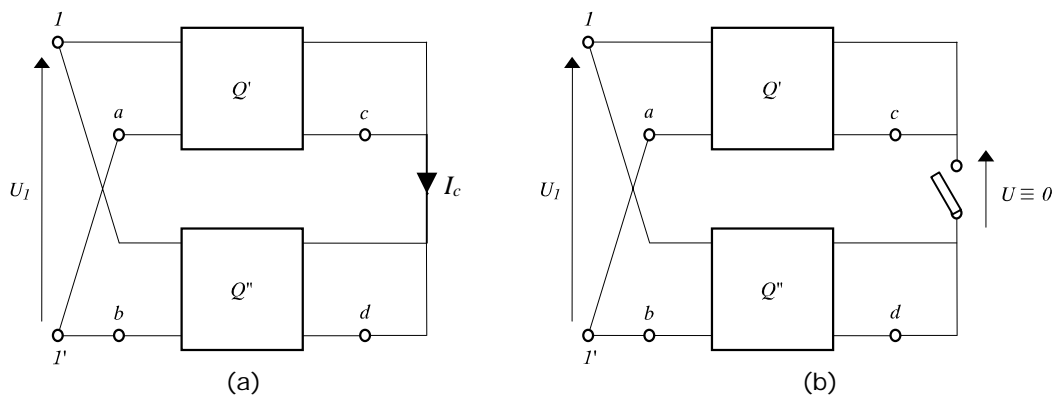


Fig. 6.10 Courant de circulation dans le test de Brune

Notons pour terminer que la mise en parallèle de quadripôles possédant une masse commune vérifie toujours le test de Brune. En effet, la mise en court-circuit séparée des accès équivaut à leur mise en court-circuit conjointe (Fig. 6.11)

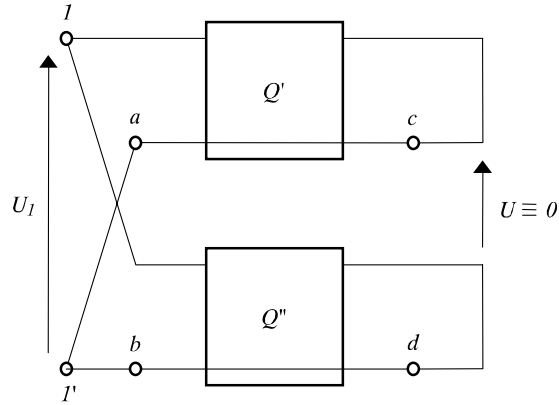


Fig. 6.11 Mise en parallèle de quadripôles à masse commune

6.3.2 Quadripôles en série

La mise en série de deux quadripôles Q' et Q'' est illustrée à la Fig. 6.12. Le courant sortant de la borne $1'$ ($2'$) de Q' est celui entrant dans la borne 1 (2) de Q'' (ce qui caractérise bien la mise en série d'éléments). Chaque quadripôle est caractérisé par ses équations :

$$U' = Z'I' \quad U'' = Z''I'' \tag{6.18}$$

Et comme on a :

$$U = U' + U'' \quad I = I' = I'' \tag{6.19}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\boxed{U = ZI \quad \text{avec} \quad Z = Z' + Z''} \tag{6.20}$$

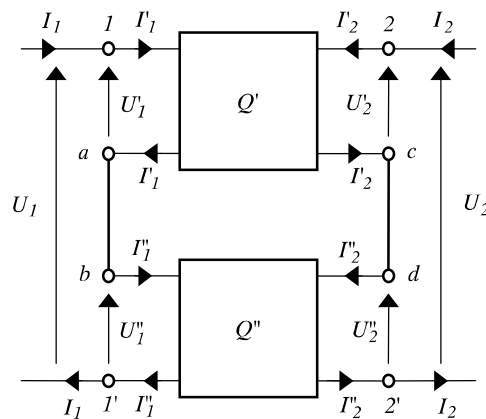


Fig. 6.12 Mise en série de quadripôles

A nouveau cette dernière relation n'est applicable qu'à deux conditions :

- que Z' et Z'' existent

- que la mise en série maintienne le fonctionnement en biporte de chaque quadripôle (autrement dit, que le courant sortant en a (respectivement b , c , d) soit bien égal au courant I'_1 (respectivement I''_1 , I'_2 , I''_2). Les équations (6.15) ne sont en effet vérifiées que dans ce cas là.

La vérification de cette seconde condition correspond au *test de Brune* dans le cas série. Pour vérifier que la mise en série ne provoque aucun courant de dérivation, dans le cas général où on place des sources aux accès 11' et 22' du quadripôle résultant, il suffit de vérifier que c'est bien le cas lorsqu'on impose une source (par exemple une source de courant) à l'accès 11' et que l'on annule la courant à l'accès 22' (Fig. 6.10.a, où le courant de circulation est noté I_c ; une valeur nulle de I_c implique en effet que les deux quadripôles fonctionnent en biportes). Le test de Brune consiste donc à mesurer la tension U aux bornes de l'interrupteur de la Fig. 6.10.b : si cette tension est nulle, le courant I_c après connexion fermeture de l'interrupteur sera nul lui aussi. On répète ensuite l'opération en imposant le courant de sortie et en laissant les entrées en circuit ouvert.

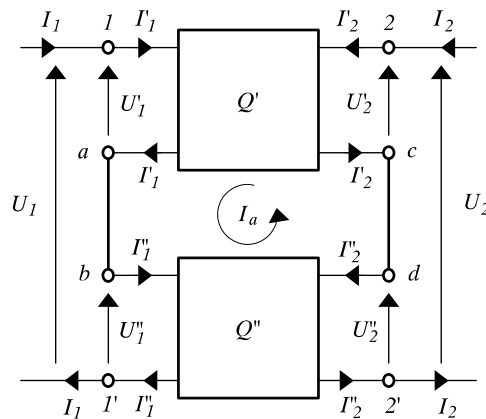


Fig. 6.13 Mise en série de quadripôles

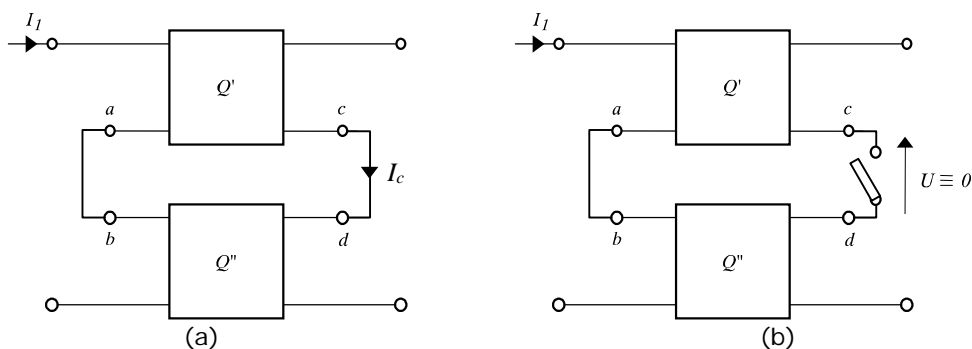


Fig. 6.14 Courant de circulation dans le test de Brune

6.3.3 Quadripôles en cascade

On remarquera que l'inversion de signe d'un des courants dans (6.8) permet d'obtenir aisément la matrice résultant d'une *mise en cascade* de deux

quadripôles, c'est-à-dire de la connexion de l'entrée de l'un à la sortie de l'autre selon la Fig. 6.15. Grâce à ce choix de signe, il vient en effet $-I_2' = I_1''$, et donc :

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

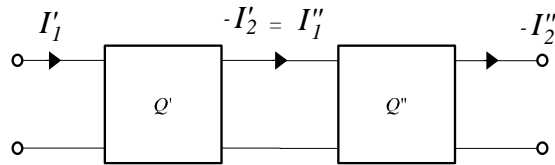


Fig. 6.15 Mise en cascade de quadripôles

La matrice de chaîne de deux quadripôles en cascade est donc le produit des matrices de chaînes partielles. Comme la multiplication matricielle n'est pas une opération commutative, il faut prendre garde à l'ordre dans lequel les quadripôles sont connectés. L'emploi de la matrice T plutôt que t permet de ranger les matrices dans le même ordre que les quadripôles.

Exemple 6.7

La matrice de chaîne du quadripôle de la Fig. 6.16(gauche) est donné par :

$$T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ n/Z & 1/n \end{bmatrix}$$

C'est également celle du quadripôle de la Fig. 6.16(droite). Il s'agit ici d'un cas particulier (en général, T change).

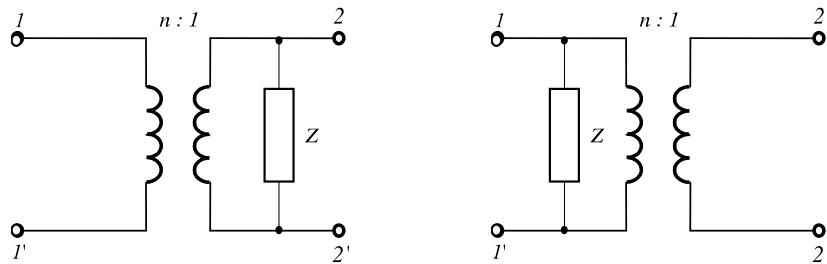


Fig. 6.16 Deux cascades de quadripôles simples, dans des ordres inversés

La mise en cascade de quadripôles n'est soumise à aucune condition particulière. Chaque accès continue en effet de fonctionner en biporte.

6.3.4 Quadripôles en série-parallèle

Il est clair que l'addition de deux matrices hybrides correspond à la mise en série de deux accès et à la mise en parallèle de deux autres, pourvu que les quadripôles entrant dans la connexion vérifient le test de Brune correspondant. La Fig. 6.17 donne un exemple de ce test pour une connexion mixte où l'on additionne les matrices.

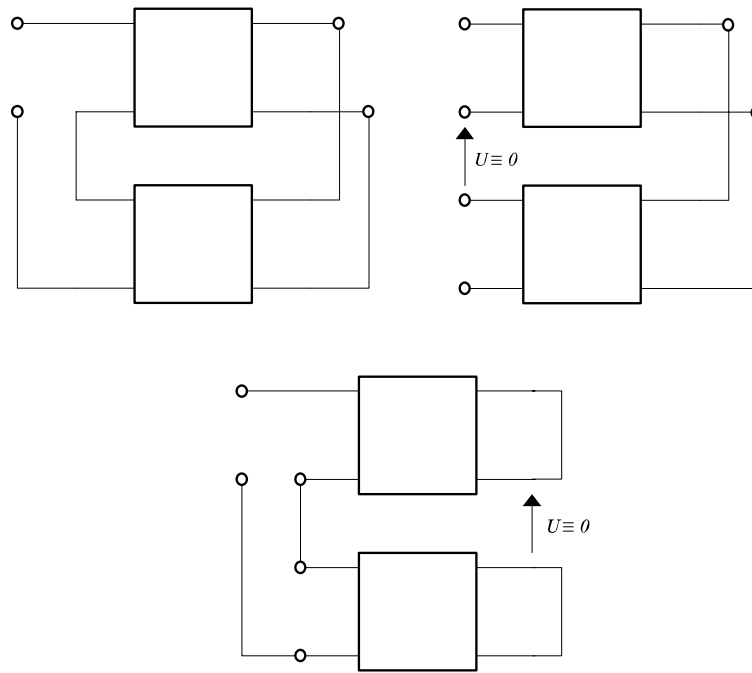


Fig. 6.17 Série-parallèle de quadripôles et test de Brune correspondant

6.4 Fonction de transfert à vide

Dans les chapitres précédents, la notion de transfert à vide d'un biporte a été introduite :

$$H(p) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} \tag{6.22}$$

A partir des diverses matrices représentatives du biporte, on peut dresser le tableau 13.19 qui donne la fonction de transfert à vide en fonction des éléments des matrices.

Z	$H(p) = Z_{21} / Z_{11}$
Y	$H(p) = -Y_{21} / Y_{22}$
h	$H(p) = -h_{21} / \Delta h$
g	$H(p) = g_{21}$
T	$H(p) = 1 / A$
t	$H(p) = \Delta t / d$

Tableau 6.2 Lien entre $H(p)$ et les éléments des matrices représentatives des quadripôles

Il est clair qu'en général la mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'' (Fig. 6.15) n'est pas équivalente au produit de leur fonctions de transfert. En effet, même si on suppose que la cascade est à vide ($I''_2=0$), cela n'est pas le cas en

général du quadripôle de gauche ($I'_2 \neq 0$). La tension U'_2 en sortie du premier quadripôle n'est donc pas donnée par $H(p)U'_1$. Le calcul complet de la fonction de transfert résultante est donné par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \\ H(p) &= \frac{1}{A} = \frac{1}{A'A'' + B'C''} \\ &= \frac{1}{A'A''} \left(\frac{1}{1 + \frac{B'C''}{A'A''}} \right) \end{aligned} \tag{6.23}$$

D'où l'on tire finalement :

$$H(p) = H'(p)H''(p) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{Z_{11}'' Y_{22}'}} \right) \tag{6.24}$$

Rappelons (Fig. 6.18) que Z_{11}'' est l'impédance d'entrée de Q'' à vide ($I''_2=0$) et que Y_{22}' est l'admittance de sortie de Q' en court-circuit ($U'_1=0$).

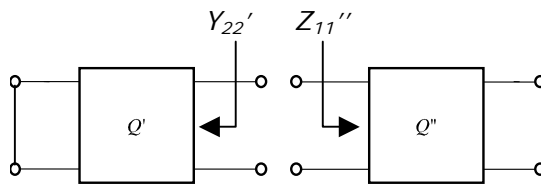


Fig. 6.18 Z_{11}'' et Y_{22}'

On en conclut que, pour que la cascade de deux quadripôles corresponde à peu près au produit de leurs fonctions de transfert, il faut que l'impédance d'entrée (à vide) du second quadripôle soit la plus élevée possible, que l'impédance de sortie (en court-circuit) du premier soit la plus petit possible, ou en tous les cas que la première soit beaucoup plus élevée que la seconde.

Lorsqu'on veut assurer à tout prix cette condition, on insère entre Q' et Q'' un amplificateur opérationnel (idéal) de fonction de transfert unitaire (Fig. 6.19), utilisé en *isolateur d'impédance* (parfois aussi appelé *amplificateur suiveur*). Nous avons vu en effet (Exemple 6.2 et Exemple 6.3) que ce montage conduit à une forte impédance d'entrée et une faible impédance de sortie.

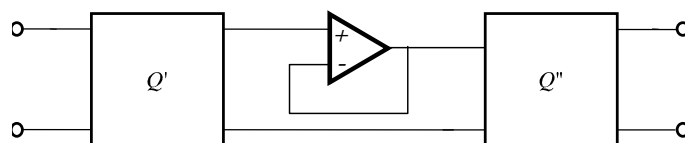


Fig. 6.19 Isolation d'impédance par ampli op.

6.5 Quadripôle sur terminaisons

Un quadripôle est utilisé d'habitude en le refermant sur des dipôles. Les dipôles considérés sont les *terminaisons* du quadripôle. Une situation très commune est celle de la Fig. 6.20 où l'une des terminaisons est une *charge* Z_L et où la source est représentée par son bipôle équivalent de Thévenin.

Notons que les terminaisons peuvent elles-mêmes être constituées à partir de quadripôles. En pratique, beaucoup de circuits sont constitués par une cascade de quadripôles. On peut étudier chacun d'entre eux en considérant tous les quadripôles à gauche et à droite comme deux dipôles (par application du théorème de Thévenin), et retomber sur le cas de la Fig. 6.20.

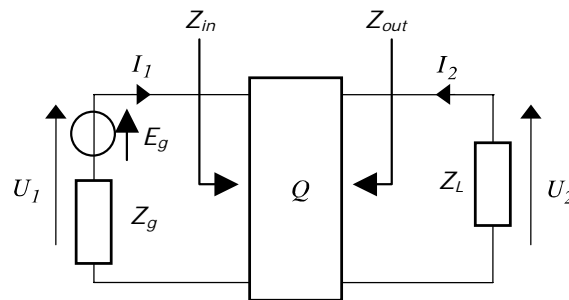


Fig. 6.20 Quadripôle sur terminaisons

Quand il est *terminé*, le quadripôle constitue un circuit dont on peut calculer les grandeurs caractéristiques car, aux deux équations liant U_1 , U_2 , I_1 et I_2 , viennent s'ajouter les équations :

$$U_1 = E_g - Z_g I_1 \tag{6.25}$$

$$U_2 = -Z_L I_2$$

On dispose donc d'un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues.

Parmi les grandeurs que l'on peut alors calculer, il en est deux qui ont une importance particulière : les impédances (ou les admittances) d'entrée et de sortie du quadripôle terminé à ses autres accès, Z_{in} et Z_{out} . On montrera à titre d'exercice que ces grandeurs sont définies par les relations suivantes⁵ :

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \tag{6.26}$$

$$Z_{out} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}$$

Application : adaptation d'impédance

Imaginons que l'on cherche à adapter une charge à une source, de façon à maximiser le transfert de puissance moyenne, et que la charge est connectée à

⁵ Il existe bien entendu des relations similaires entre Z_{in} et Z_{out} et les autres matrices représentatives du quadripôle.

la source à travers un quadripôle (comme à la Fig. 6.20). Le rapport entre la puissance moyenne absorbée par la charge, P_L , et la puissance moyenne fournie par la source, P_g , est donné par :

$$\frac{P_L}{P_g} = \frac{P_L}{P_2} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_g} \quad (6.27)$$

où P_1 est la puissance absorbée par la porte d'entrée du quadripôle, et P_2 est la puissance fournie par sa porte de sortie. Il convient dès lors que les deux portes du quadripôles soient adaptées :

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_g^* \\ Z_{out} &= Z_L^* \end{aligned} \quad (6.28)$$

et que le quadripôle dissipe le moins possible d'énergie. On utilisera typiquement des quadripôles non dissipatifs (L,C).

6.6 Quadripôles passifs – Réciprocité - Symétrie

Nous avons vu jusqu'ici que le comportement d'un quadripôle quelconque, tant qu'il fonctionne en biporte, est complètement déterminé par les quatre éléments d'une de ses matrices représentatives. On peut se demander si ces quatre éléments sont toujours indépendants.

On admettra ici qu'un quadripôle passif (excluant explicitement les sources dépendantes) est toujours *réciroque*. Un quadripôle est dit réciroque si, lorsqu'on place une source de tension à son entrée et qu'on mesure le courant de court-circuit à sa sortie, on obtient le même résultat qu'en branchant la source à la sortie et en mesurant le courant de court-circuit à l'entrée. Il vient alors immédiatement, vu la définition des admittances de transfert (Fig. 6.6) :

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (6.29)$$

On en déduit facilement, en partant des relations entre matrices représentatives, les autres relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{21} \\ \Delta \mathbf{A} &= 1 \\ \Delta \mathbf{a} &= 1 \\ h_{12} &= -h_{21} \\ g_{12} &= -g_{21} \end{aligned} \quad (6.30)$$

On constate donc qu'un quadripôle passif (fonctionnant en biporte) est caractérisé par trois grandeurs indépendantes seulement.

Un quadripôle est dit *symétrique* si la permutation des deux accès entre eux ne modifie pas le quadripôle, *même* lorsque l'excitation et la réponse sont de même nature (source de tension ou courant). Il est clair que cette condition est plus large que la condition de récirocité. Il est facile de voir qu'on a alors en plus :

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= Z_{22} \\
 Y_{11} &= Y_{22} \\
 A &= D \\
 a &= d \\
 \Delta \mathbf{h} &= 1 \\
 \Delta \mathbf{g} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

Un quadripôle possédant une symétrie verticale interne est évidemment symétrique par nature.

On constate donc qu'un quadripôle symétrique (fonctionnant en biporte) est caractérisé par deux grandeurs indépendantes seulement.

Exemple 6.8 – Treillis symétrique

La matrice d'impédance du treillis symétrique de la Fig. 6.21 est donné par :

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= (Z_1 + Z_2) / 2 = Z_{22} \\
 Z_{12} &= (Z_1 - Z_2) / 2 = Z_{21}
 \end{aligned}$$

Le calcul de la matrice d'admittance fournit de même :

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= (Y_1 + Y_2) / 2 = Y_{22} \\
 Y_{12} &= (Y_1 - Y_2) / 2 = Y_{21}
 \end{aligned}$$

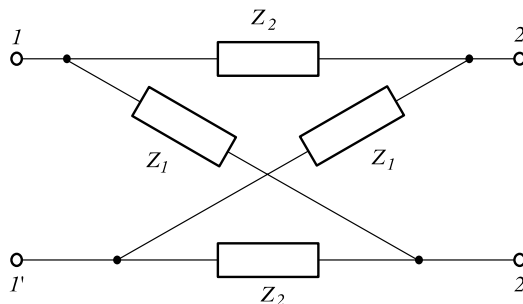


Fig. 6.21 Treillis symétrique

6.7 Circuits équivalents à un quadripôle

Lorsqu'on cherche à déterminer le comportement d'un circuit contenant un ou plusieurs quadripôles dont on ne connaît que les matrices caractéristiques, il peut être utile de remplacer le quadripôle par un circuit équivalent (ce qui permettra par exemple d'écrire les équations de maille ou de nœuds du circuit complet).

6.7.1 Circuits dérivés de la matrice Z

L'examen des relations (6.2) conduit immédiatement au circuit de la Fig. 6.22.a.

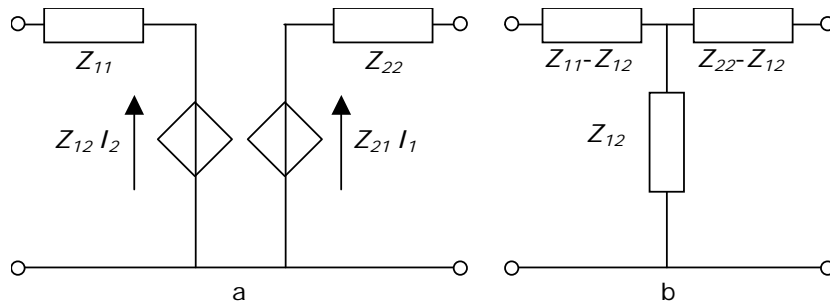


Fig. 6.22 Circuits dérivés de la matrice \mathbf{Z}
(a. Cas général ; b. Quadripôle réciproque)

Dans le cas d'un quadripôle réciproque, on peut lui substituer le circuit de la Fig. 6.22.b.

Exemple 6.9

Il est immédiat, vu ces représentations équivalentes, que la matrice d'impédance du quadripôle de la Fig. 6.23 est donné par :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_a + Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_b + Z_{22} \end{bmatrix}$$

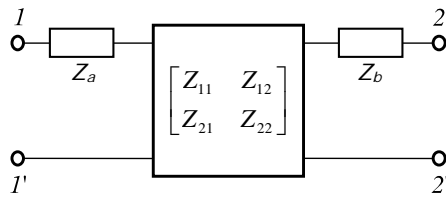


Fig. 6.23 Cascade avec des impédances en série.

6.7.2 Circuits dérivés de la matrice Y

On trouve de la même façon (en partant de (6.5)) les circuits de la Fig. 6.22.

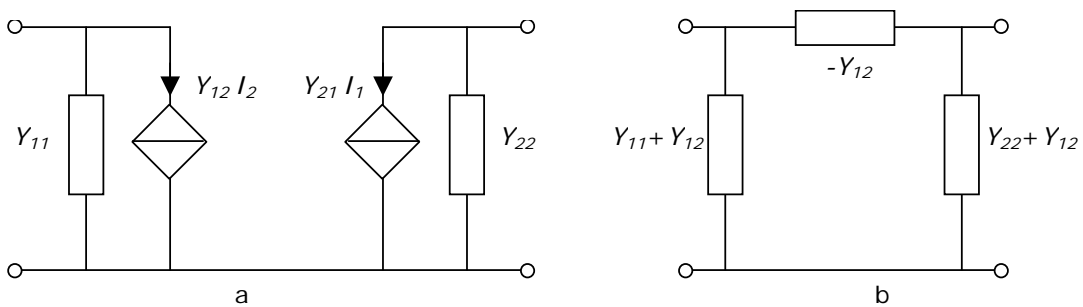


Fig. 6.24 Circuits dérivés de la matrice \mathbf{Y}
(a. Cas général ; b. Quadripôle réciproque)

Exemple 6.10

Il vient tout aussi simplement, pour la matrice d'admittance du quadripôle de la Fig. 6.25 :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_b + Y_{22} \end{bmatrix}$$

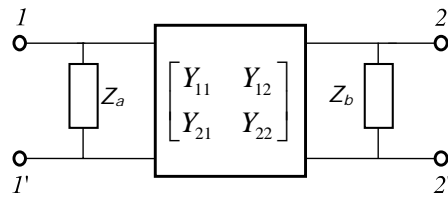


Fig. 6.25 Cascade avec des impédances en shunt (parallèle).

6.7.3 Circuits dérivés de la matrice g

Le circuit dérivé de la matrice **g** est donné à la Fig. 6.26.a. Notons que, sur ce graphique, g_{11} a la dimension d'une admittance, et g_{22} celle d'une impédance. Cette représentation est souvent utilisée lorsque le quadripôle se comporte comme un amplificateur de tension. En particulier, si il n'y a aucun retour de la sortie sur l'entrée, $g_{12}=0$, ce qui conduit au circuit *unilatéral* de la Fig. 6.26.b

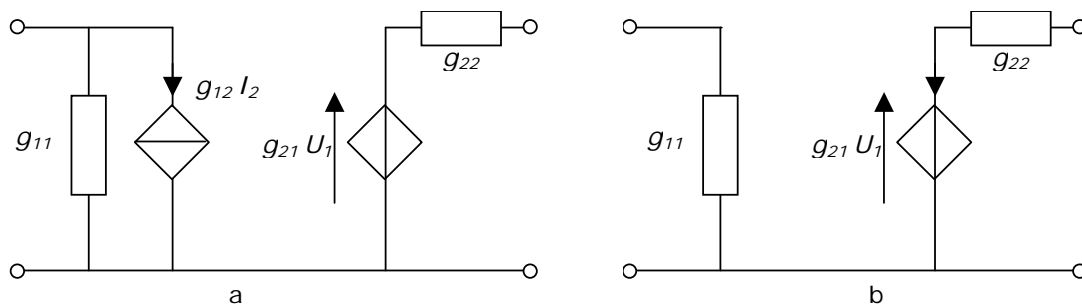


Fig. 6.26 Circuits dérivés de la matrice **g**
(a. Cas général ; b. Quadripôle unilatéral)

Exemple 6.11

Modélisons un amplificateur de tension unilatéral, dont la résistance d'entrée vaut 100 kΩ, dont le gain à vide vaut 100 en basse fréquence et décroît de 20 dB/décade à partir de 1000 rad/s, et dont la résistance de sortie vaut 1 kΩ.

Il vient immédiatement que $g_{11}=10^{-5}$, $g_{22}=10^3$, $g_{12}=0$, et $g_{21}(p)$ doit être une fonction de transfert possédant un pôle (évidemment à gauche de l'axe imaginaire) dont le module vaut 10^3 , et un gain BF de 100 :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ \frac{10^5}{p+10^3} & 10^3 \end{bmatrix}$$

6.7.4 Circuits dérivés de la matrice h

Le circuit dérivé de la matrice **h** est donné à la Fig. 6.27.a. Notons que, sur ce graphique, h_{11} a la dimension d'une impédance, et h_{22} celle d'une admittance. Cette représentation est souvent utilisée lorsque le quadripôle se comporte comme source de courant commandée en courant, ce qui est typiquement le cas

dur transistor. En particulier, si il n'y a aucun retour de la sortie dur l'entrée, $h_{12}=0$, ce qui conduit au circuit *unilatéral* de la Fig. 6.27.b

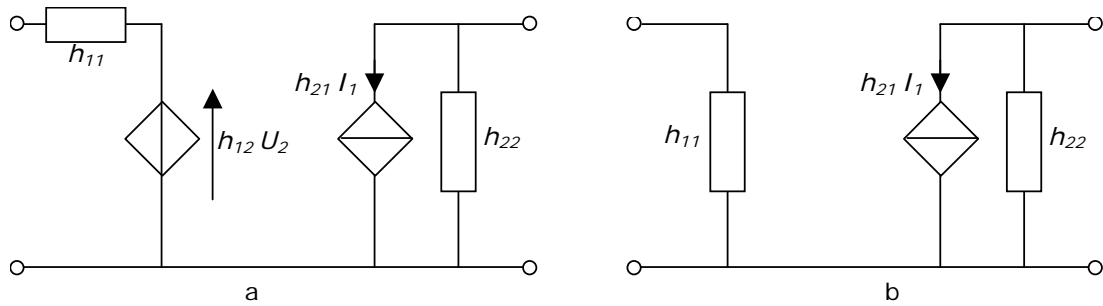


Fig. 6.27 Circuits dérivés de la matrice h
(a. Cas général ; b. Quadripôle unilatéral)

Exemple 6.12

Modélisons un transistor à émetteur commun en petits signaux, dont le circuit équivalent a déjà été mentionné à la section 2.5 (Fig. 6.28).

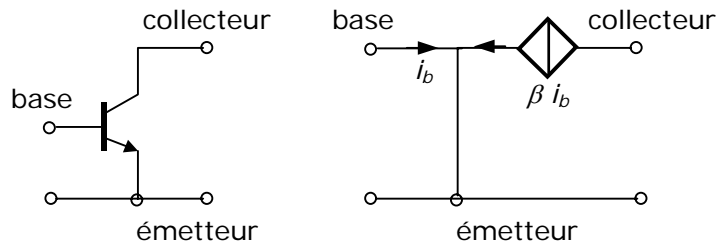


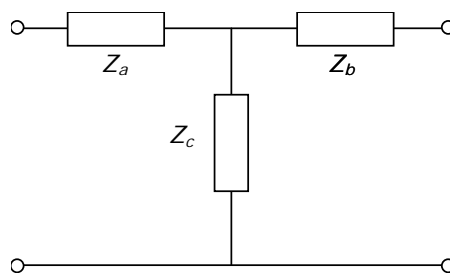
Fig. 6.28 Circuit équivalent au transistor en petits signaux

Il vient immédiatement que $h_{11}=0$, $h_{22}=0$, $h_{12}=0$, et $h_{21}=\beta$.

Exercices

Exercice 6.1

Trouver l'expression des matrices d'impédance et d'admittance du quadripôle en T de la figure ci-dessous :



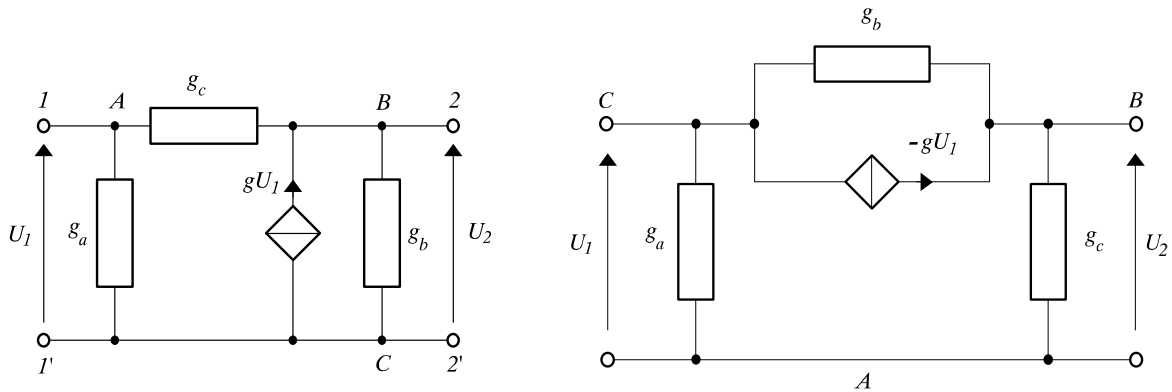
Solution

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_a Z_c} \begin{bmatrix} Z_b + Z_c & -Z_c \\ -Z_c & Z_a + Z_c \end{bmatrix}$$

Exercice 6.2

Trouver la matrice d'admittance des deux quadripôles ci-dessous.

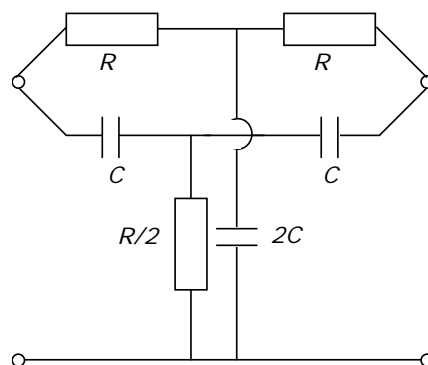


Solution

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} g_a + g_c & -g_c \\ -g_c - g & g_b + g_c \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} g_a + g_b - g & -g_b \\ g - g_b & g_c + g_b \end{pmatrix}$$

Exercice 6.3

Trouver l'expression de la fonction de transfert opérationnelle du quadripôle en double T de la figure ci-dessous. Montrer que son diagramme de Bode (asymptotique et réel) est équivalent à un circuit bouchon (blocage d'une fréquence).



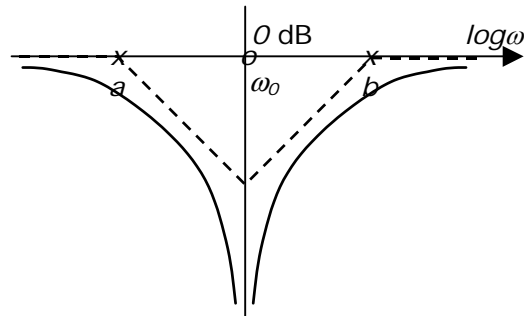
Solution

Après vérification du test de Brune pour les quadripôles en parallèle (!), on obtient facilement :

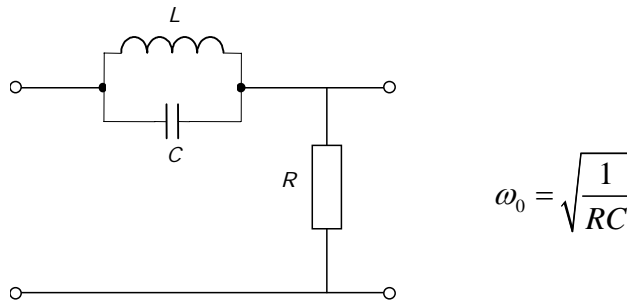
$$H(p) = \frac{p^2 R^2 C^2 + 1}{p^2 R^2 C^2 + 4pRC + 1}$$

Cette fonction de transfert possède une paire de zéros complexes conjugués à la pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{RC}}$ et deux pôles réels dont le produit vaut ω_0^2 . On a donc :



Remarque : Ce circuit est donc équivalent (en terme de fonction de transfert) au circuit bouchon plus simple de la figure ci-dessous :



Mais si on impose (typiquement) $C=1\mu\text{F}$ et que l'on cherche à obtenir une coupure à 50 Hz, il vient : $L \approx 10\text{H}$, ce qui est évidemment inacceptable en pratique.

Le quadripôle en double T présente l'avantage de ne pas nécessiter d'inductance (on cherche souvent à les éviter, vu leur faible précision et leur encombrement).